Wilhelm-Gymnasium

zu

Hamburg.

Bericht über das 8. Schuljahr

1888—1889.

Hamburg, 1889.

Gedruckt bei Lütcke & Wulff, Eines Hohen Senates, wie auch des Johanneums Buchdruckern.

Wilhelm-Gymnasium

zu

Hamburg.

Bericht über das 8. Schuljahr

1888–1889.

Beigegeben ist:

Die Gegenkurven der Kegelschnitte. Vom Oberlehrer Dr. *Karl Glänzer*.

Hamburg, 1889.

Gedruckt bei Lütcke & Wulff, Eines Hohen Senates, wie auch des Johanneums Buchdruckern.

1889. Progr. Nr. 689.

Die

Gegenkurven der Kegelschnitte.

Von

Dr. ***Karl Glänzer,***

Oberlehrer.

---

§ 1.

Gegenkurve einer Kurve.

Fig. 1. Die Parallelkoordinaten eines Punktes in der Ebene und der zu Grunde gelegte Koordinatenwinkel können nicht allein auf die gewöhnliche Art zur Konstruktion eines Parallelogramms und damit des gesuchten Punktes selbst dienen, sondern sie bestimmen zugleich ein überschlagenes Viereck und damit einen zweiten Punkt, welcher als dem ersteren entsprechend bezeichnet werden mag. Derselbe ist der zweite reelle Schnittpunkt der beiden Kreise, die man um die Endpunkte der auf den Achsen abgetragenen Koordinaten mit diesen zu schlagen hat. Denkt man sich nun eine bestimmte Kurve auf die angegebene Art konstruiert, so daß man zu einem jeden Punkte P zugleich den ihm entsprechenden Punkt P_1 erhält, so entsteht neben jener eine zweite Kurve, welche ich die Gegenkurve der ersteren in Bezug auf das gegebene Koordinatensystem nenne. *)

Eine elementare Betrachtung zeigt, daß der Winkel $OP_1N = MOP_1$, $NP_1M = \omega$, dem Koordinatenwinkel, und daß, wenn man die Ordinate PM verlängert bis sie den um M geschlagenen Kreis in Q trifft und P_1 mit Q verbindet, der Winkel MP_1Q das Supplement zu OP_1M und folglich OP_1Q eine Gerade ist. Weil demnach OP_1P ein rechter Winkel, so gilt für je zwei entsprechende Punkte der Satz, daß ihre Verbindungslinie auf dem Radius vector der Gegenkurve senkrecht steht. Da ferner die zur Ordinatenachse parallele Gerade PQ durch die Abscissenachse halbiert wird, so bilden die vom Koordinatenanfang nach je zwei entsprechenden Punkten gerichteten Geraden mit den Achsen vier harmonische Strahlen, und alle entsprechenden Radii vectores der Kurve und ihrer Gegenkurve sind konjugierte Strahlen einer Involution, für welche die Koordinatenachsen die Doppelstrahlen sind. Man hat daher den Satz: Wird eine Kurve von den Strahlen eines involutorischen Büschels mit zwei reellen Doppelstrahlen geschnitten, so liegen die Fußpunkte aller Senkrechten, welche von den Schnittpunkten je eines Strahls auf den ihm konjugierten gefällt werden können, auf der der ursprünglichen Kurve in Bezug auf die Doppelstrahlen als Koordinatenachsen zugehörigen Gegenkurve.

Nach diesem Satze kann die Gegenkurve einer gegebenen Kurve in Bezug auf ein bestimmtes Koordinatensystem auch folgendermaßen gezeichnet werden: Man konstruiere die konjugierten Strahlenpaare der durch die Koordinatenachsen als Doppelstrahlen bestimmten Involution und fälle von den Schnittpunkten derselben mit der Kurve auf den jedesmal

*) Vgl. meine Abhandlung: Die Gegenkurve der geraden Linie. Corbach Gymn.-Progr. 1874.

konjugierten Strahl die Lote, so sind deren Fußpunkte Punkte der Gegenkurve. Die Strahleninvolution erhält man am einfachsten*), wenn man durch den Koordinatenanfang einen beliebigen Kegelschnitt, etwa einen Kreis legt und an diesen in seinen Schnittpunkten mit den Achsen die Tangenten konstruiert. Jede durch den Durchschnitt derselben gehende Gerade schneidet den Kegelschnitt in Punktepaaren einer Involution. Diese Punkte mit dem Koordinatenanfang verbunden ergeben die konjugierten Strahlenpaare.

Aus der angegebenen Konstruktion lassen sich folgende Eigenschaften der Gegenkurve erkennen:

1. Die Schnittpunkte der gegebenen Kurve mit den Koordinatenachsen sind zugleich Punkte der Gegenkurve, denn die Achsen sind die Doppelelemente der Involution.
2. Für die Gegenkurve einer Kurve n. Ordnung ist der Scheitel der Involution ein $2n$facher Punkt, denn die Halbierungslinien der von den Koordinatenachsen eingeschlossenen Winkel bilden ein Paar und zwar das einzige von konjugierten zu einander rechtwinkligen Strahlen, die s. g. Achsen der Involution, und jede schneidet die gegebene Kurve im allgemeinen in n Punkten.
3. Jeder Strahl der Involution schneidet die Gegenkurve in $3n$ Punkten, nämlich außer in dem $2n$fachen Scheitel noch in den n Punkten, welche den Durchschnitten des konjugierten Strahls mit der ursprünglichen Kurve entsprechen. Die Gegenkurve einer Kurve n. Ordnung ist daher vor der $3n$. Ordnung.
4. Da alle Schnittpunkte der Achsen der Involution und der Gegenkurve im Scheitel der Involution liegen, so haben die Involutionsachsen im Scheitel $3n$ Punkte mit der Gegenkurve gemein und berühren dieselbe.

§ 2.

Gleichung der Gegenkurve.

In Bezug auf die Achsen OX und OY mögen die Parallelkoordinaten der gegebenen Kurve mit x und y, die der Gegenkurve mit ξ und η bezeichnet werden; ebenso seien r und φ die Polarkoordinaten der ersten, ϱ und ϑ die der zweiten Kurve. Es ist alsdann $M_1P_1 = -\eta$ und der Winkel $M_1OP_1 = 2\pi - \vartheta$ zu setzen. Da zwei entsprechende Radii vectores mit den Achsen harmonisch sind, hat man die Relation:

$$\frac{\sin\varphi}{\sin(\omega-\varphi)} = -\frac{\sin\vartheta}{\sin(\omega-\vartheta)} = \lambda, \text{ woraus folgt: } \frac{y}{x} = -\frac{\eta}{\xi} = \lambda.$$

Nun ergeben sich aus dem Dreieck OMP_1 zwischen den Parallelkoordinaten der Kurve und den Polarkoordinaten der Gegenkurve die Beziehungen:

$$\varrho\sin(\omega-\vartheta) = x\sin(\omega-2\vartheta), \qquad \varrho\sin\vartheta = -y\sin(\omega-2\vartheta).$$

Ferner ist $\varrho\sin(\omega-\vartheta) = \xi\sin\omega$, $\quad \varrho\sin\vartheta = \eta\sin\omega$.

Folglich: $x\sin(\omega-2\vartheta) = \xi\sin\omega$, $\quad y\sin(\omega-2\vartheta) = -\eta\sin\omega$.

Da nun $\sin(\omega-\vartheta) = \dfrac{\xi\sin\omega}{\sqrt{\xi^2+2\xi\eta\cos\omega+\eta^2}}$ und $\sin\vartheta = \dfrac{\eta\sin\omega}{\sqrt{\xi^2+2\xi\eta\cos\omega+\eta^2}}$,

*) Durège, die ebenen Kurven dritter Ordnung. Leipzig 1871. Art. 128.

mithin $\cos(\omega-\vartheta) = \dfrac{\xi\cos\omega+\eta}{\sqrt{\xi^2+2\xi\eta\cos\omega+\eta^2}}$ und $\cos\vartheta = \dfrac{\xi+\eta\cos\omega}{\sqrt{\xi^2+2\xi\eta\cos\omega+\eta^2}}$,

so folgt: $\sin(\omega-2\vartheta) = \dfrac{(\xi^2-\eta^2)\sin\omega}{\xi^2+2\xi\eta\cos\omega+\eta^2}$. Mithin ist

$$x = \xi\,\frac{\xi^2+2\xi\eta\cos\omega+\eta^2}{\xi^2-\eta^2},$$

$$y = -\eta\,\frac{\xi^2+2\xi\eta\cos\omega+\eta^2}{\xi^2-\eta^2}.$$

Durch Elimination der Variabeln x und y aus diesen Gleichungen und der Gleichung $f(x, y) = 0$ der gegebenen Kurve erhält man die Gleichung der Gegenkurve in Parallelkoordinaten. Für rechtwinklige Koordinaten vereinfachen sich die Transformationsgleichungen in:

$$x = \xi\,\frac{\xi^2+\eta^2}{\xi^2-\eta^2}, \quad y = -\eta\,\frac{\xi^2+\eta^2}{\xi^2-\eta^2}.$$

Will man die Gleichung der Gegenkurve in Polarkoordinaten erhalten, so ist in diesem Falle

$$x = \frac{\varrho\cos\vartheta}{\cos 2\vartheta}, \quad y = -\frac{\varrho\sin\vartheta}{\cos 2\vartheta}.$$

Setzt man $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ und beachtet, daß für rechtwinklige Koordinaten $\varphi = 2\pi - \vartheta$, also $\cos\varphi = \cos\vartheta$ und $\sin\varphi = -\sin\vartheta$, so gehen die beiden letzten Gleichungen über in: $\varrho = r\cos 2\vartheta$.

Man bestätigt hier leicht die am Schluß des vorigen Paragraphen angegebenen allgemeinen Sätze. Trägt man nämlich die obigen Worte von x und y in die allgemeine Gleichung des n. Grades

$$Ax^n + Bx^{n-1}y + \ldots + Lx^m + Mx^{m-1}y + \ldots + Px^2 + Qxy + Ry^2 + Sx + Ty + U = 0$$

ein, wo $n > m > 2$, so folgt:

$$\begin{aligned} &A(\xi^{3n}+\ldots) - B(\xi^{3n-3}+\ldots)(\xi^2\eta + 2\xi\eta^2\cos\omega + \eta^3) + \ldots \\ &+ L(\xi^{3m}+\ldots)(\xi^2-\eta^2)^{n-m} - \ldots + P(\xi^6+\ldots)(\xi^2-\eta^2)^{n-2} - \ldots \\ &+ S(\xi^3 + 2\xi^2\eta\cos\omega + \xi\eta^2)(\xi^2-\eta^2)^{n-1} - T(\xi^2\eta + 2\xi\eta^2\cos\omega + \eta^3)(\xi^2-\eta^2)^{n-1} \\ &+ U(\xi^2-\eta^2)^n = 0 \text{ oder} \\ &A\xi^{3n} \ldots + L\xi^{2n+m} + \ldots + P\xi^{2n+2} + \ldots + S\xi^{2n+1} + \ldots - T\xi^{2n}\eta + \ldots \\ &+ U(\xi^2-\eta^2)^n = 0, \text{ wobei } 3n > 2n+m > 2n+2. \end{aligned}$$

Es resultiert also eine Gleichung $3n$. Grades.

Die Schnittpunkte der Achsen mit beiden Kurven sind identisch. Denn für $y = 0$ folgt für die Grundkurve: $Ax^n + \ldots + Lx^m + \ldots + Px^2 + Sx + U = 0$ und für $\eta = 0$ für die Gegenkurve: $A\xi^{3n} + \ldots + L\xi^{2n+m} + \ldots + P\xi^{2n+2} + S\xi^{2n+1} + U\xi^{2n} = 0$ oder $\xi^{2n}(A\xi^n + \ldots + L\xi^m + \ldots + P\xi^2 + S\xi + U) = 0$. Entsprechende Gleichungen resultieren für $x = 0$ und $\xi = 0$.

Der Koordinatenanfang ist ein $2n$facher Punkt der Gegenkurve, denn der niedrigste Term ihrer Gleichung enthält die Variabeln im $2n$. Grade. Die Tangenten in jenem Punkte, dargestellt durch $(\xi^2-\eta^2)^n = 0$, sind die beiden $n$fachen Geraden, welche den Koordinatenwinkel und dessen Nebenwinkel halbieren. Sie haben jede im Koordinatenanfang $3n$ Punkte mit der Kurve gemein, denn durch Substitution von $\eta = \xi$ und $\eta = -\xi$ in die Gleichung der Gegenkurve folgt:

$$(A - B + \ldots)\, 2^n (1 + \cos\omega)^n \xi^{3n} = 0 \text{ und } (A + B + \ldots)\, 2^n (1 - \cos\omega)^n \xi^{3n} = 0.$$

§ 3.

Allgemeine Gleichung der Gegenkurven der Kegelschnitte.

Die allgemeine Gleichung der Kegelschnitte ist *)

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0,$$

folglich die der Gegenkurve für schiefwinklige Parallelkoordinaten:

$$(a_{11}\xi^2 - 2a_{12}\xi\eta + a_{22}\eta^2)(\xi^2 + 2\xi\eta\cos\omega + \eta^2)^2 + 2(a_{13}\xi - a_{23}\eta)(\xi^2 + 2\xi\eta\cos\omega + \eta^2)(\xi^2 - \eta^2) +$$

$a_{33}(\xi^2 - \eta^2)^2 = 0$ oder in Polarkoordinaten, da $x = \dfrac{\varrho \sin(\omega - \vartheta)}{\sin(\omega - 2\vartheta)}$ und $y = -\dfrac{\varrho \sin\vartheta}{\sin(\omega - 2\vartheta)}$,

$$a_{11}\sin^2(\omega - \vartheta) - 2a_{12}\sin(\omega - \vartheta)\sin\vartheta + a_{22}\sin^2\vartheta)\,\varrho^2 +$$

$$2(a_{13}\sin(\omega - \vartheta) - a_{23}\sin\vartheta)\sin(\omega - 2\vartheta)\,\varrho + a_{33}\sin^2(\omega - 2\vartheta) = 0.$$

In Übereinstimmung mit den vorhergehenden Erörterungen ersieht man, daß im allgemeinen die Gegenkurven der Kegelschnitte Kurven sechster Ordnung sind, welche mit den Grundkurven die etwaigen Schnittpunkte beider Koordinatenachsen gemein haben und im Anfang der Koordinaten einen vierfachen Punkt besitzen, so daß vier Zweige der Gegenkurven durch diesen Punkt gehen; die rechtwinklig zu einander stehenden Involutionsachsen vereinigen im Koordinatenanfang alle Schnittpunkte und berühren die Kurve. Unter der Bedingung:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0, \text{ wobei } a_{ik} = a_{ki}, \text{ oder}$$

$$a_{11}\,a_{22}\,a_{33} + 2a_{23}\,a_{13}\,a_{12} - a_{11}\,a_{23}^2 - a_{22}\,a_{13}^2 - a_{33}\,a_{12}^2 = 0$$

zerfällt der Kegelschnitt in zwei Gerade. In diesem Falle muß die Gegenkurve aus zwei Kurven dritter Ordnung, den Gegenkurven der geraden Linien, bestehen. Im übrigen stellt die allgemeine Gleichung zweiten Grades eine Ellipse dar, wenn $a_{12}^2 - a_{11}\,a_{22}$ negativ, eine Hyperbel, wenn $a_{12}^2 - a_{11}\,a_{22}$ positiv und eine Parabel, wenn $a_{12}^2 - a_{11}\,a_{22} = 0$ ist. Ist $a_{12} = 0$, so sind die Koordinatenachsen zu einem Paar konjugierter Durchmesser parallel. Beim Kreise, für welchen $a_{11} = a_{22}$, ist jeder Durchmesser rechtwinklig zu dem ihm konjugierten.

Wenn $a_{33} = 0$ ist, geht die Kurve zweiter Ordnung durch den Koordinatenanfang; dann bilden die zweiten Schnittpunkte der konjugierten Strahlenpaare eine Involution auf dem Kegelschnitt, und es schneiden sich die Verbindungslinien der einzelnen Punktepaare in einem und demselben Punkte; sie bilden einen mit der Strahleninvolution projektivischen Strahlbüschel, dessen Scheitel der Schnittpunkt der beiden Tangenten des Kegelschnitts ist, welche in den Durchschnittspunkten der Koordinatenachsen als den Doppelstrahlen der Involution zu konstruieren sind. (Vgl. § 1.) Für die Gegenkurve ist in diesem Falle, da der niedrigste Term ihrer Gleichung die Variabeln im 5. Grade enthält, der Koordinatenanfang ein fünffacher Punkt.

*) Vgl. Salmon — Fiedler, anal. Geom. d. Kegelschn. Leipzig 1878. Art. 92 ff.

Auf jedem Strahle (vgl. Fig. 2) liegt daher nur noch je ein Punkt des Kegelschnitts und der Gegenkurve. Bezeichnet man die auf zwei konjugierten Strahlen liegenden vier Punkte als zwei zusammengehörige Paare entsprechender Punkte, so gilt hier der Satz: Je zwei zusammengehörige Paare entsprechender Punkte bilden ein Kreisviereck, dessen eines Seitenpaar und dessen eine Diagonale durch je einen festen Punkt gehen.

Ist in der allgemeinen Gleichung zweiten Grades $a_{13} = 0$ und $a_{23} = 0$, so wird jede durch den Koordinatenanfang gezogene Gerade in ihm halbiert oder der Anfangspunkt ist ein Mittelpunkt der Kurve. Jeder Kegelschnitt hat nur einen Mittelpunkt, der der Parabel liegt in unendlicher Entfernung. Der Mittelpunkt eines Kegelschnitts als Koordinatenanfang ist zugleich Mittelpunkt der Gegenkurve, wie sich aus der Polargleichung der letzteren unmittelbar ergiebt. Nimmt man bei den s. g. Centralkurven (Ellipse und Hyperbel) die zu einander rechtwinklig konjugierten Durchmesser zu Koordinatenachsen, so liegen nicht nur die Grundkurven sondern auch die Gegenkurven zu beiden Achsen symmetrisch, da zwei konjugierte Strahlen mit den Achsen gleiche Winkel bilden. Auf jedem Strahl (vgl. Fig. 7) befinden sich jetzt in gleichen Abständen vom Koordinatenanfang je zwei Punkte der Grundkurve und der Gegenkurve und auf zwei konjugierten Strahlen vier zusammengehörige Paare entsprechender Punkte, nämlich auf dem Kegelschnitt die Punkte P' P'' P''' P^{IV} und auf der Gegenkurve die entsprechenden P_1 P_2 P_3 P_4. Auf dem einen Strahl liegen P' und P''', P_2 und P_4, auf dem andern P'' und P^{IV}, P_1 und P_3. Nun erkennt man unmittelbar, daß die Verbindungslinien $P'P_1$ und $P''P_2$, ebenso $P'''P_3$ und $P^{IV}P_4$ auf der Abscissenachse, die Verbindungslinien $P'P_1$ und $P^{IV}P_4$, ebenso $P''P_2$ und $P'''P_3$ auf der Ordinatenachse sich schneiden und zwar in je gleichen Abständen vom Mittelpunkte. Diese vier auf den rechtwinkligen Achsen liegenden Schnittpunkte bestimmen ein gleichseitiges Parallelogramm, und das Verhältnis der Diagonalen desselben ist gleich dem Sinusverhältnis der konjugierten Strahlen. Die Größe der Diagonalen hängt außer von diesem Sinusverhältnis noch von der Art des Kegelschnitts ab, den man betrachtet.

Diese Ergebnisse gelten nicht nur für Kegelschnitte, sondern für alle Kurven, sofern sie symmetrisch zu den Achsen liegen, wie sich auch auf analytischem Wege zeigen läßt. Es werde nämlich eine beliebige Kurve durch einen bestimmten Strahl $y - \lambda x = 0$ in einem Punkte x', $y' = \lambda x'$ geschnitten und ihre Gegenkurve durch den konjugierten Strahl $\eta + \lambda\xi = 0$ in dem entsprechenden Punkte ξ', $\eta' = -\lambda\xi'$, so hat die Verbindungslinie dieser beiden Punkte für ein beliebiges Parallelkoordinatensystem, wenn ξ und η die variabeln Koordinaten bezeichnen, die Gleichung:

$$\eta - y' = \frac{y' - \eta'}{x' - \xi'}(\xi - x') \text{ oder } \eta - \lambda x' = \lambda\frac{x' + \xi'}{x' - \xi'}(\xi - x').$$

Nun ist $\xi' = \dfrac{x' \sin(\omega - 2\vartheta)}{\sin\omega}$, folglich

$$\eta - \lambda x' = \lambda\frac{\sin\omega + \sin(\omega - 2\vartheta)}{\sin\omega - \sin(\omega - 2\vartheta)}(\xi - x') \text{ oder}$$

$\eta - \lambda x' = \lambda\dfrac{\sin(\omega - \vartheta)\cos\vartheta}{\sin\vartheta\cos(\omega - \vartheta)}(\xi - x')$. Da aber $\dfrac{\sin\vartheta}{\sin(\omega - \vartheta)} = -\lambda$, so folgt:

$$\eta - \lambda x' = -\frac{\cos\vartheta}{\cos(\omega - \vartheta)}(\xi - x') \text{ oder nach § 2}$$

$$\eta - \lambda x' = -\frac{\xi' + \eta' \cos\omega}{\xi' \cos\omega + \eta'} (\xi - x') \text{ und, da auch } \frac{\eta'}{\xi'} = -\lambda,$$

$$\eta - \lambda x' = -\frac{1 - \lambda \cos\omega}{\cos\omega - \lambda} (\xi - x') \text{ oder}$$

$$\eta + \frac{1 - \lambda\cos\omega}{\cos\omega - \lambda}\,\xi - \frac{1 - \lambda^2}{\cos\omega - \lambda}\,x' = 0.$$

Ist das Koordinatensystem rechtwinklig, so lautet die Gleichung der Verbindungslinie zweier entsprechender Punkte: $\eta - \frac{1}{\lambda}\,\xi + \frac{1 - \lambda^2}{\lambda}\,x' = 0$. Hierbei ist x' eine Funktion von λ. Liegt aber die Grundkurve symmetrisch zur Abscissenachse, so erhält man die Gleichung der Verbindungslinie des mit jenem Paare entsprechender Punkte zusammengehörigen Paares durch bloße Vertauschung von λ mit $-\lambda$, indem x' unverändert bleibt. Nimmt man noch die Gleichung der Abscissenachse hinzu, so hat man ein System von Gleichungen:

$$\begin{aligned} \lambda\eta - \xi + (1 - \lambda^2)\,x' &= 0 \\ -\lambda\eta - \xi + (1 - \lambda^2)\,x' &= 0 \\ \eta \qquad\qquad\qquad &= 0, \end{aligned}$$

deren Summe, nachdem die erste mit -1 und die dritte mit $2\,\lambda$ multipliziert worden, identisch gleich Null ist. Welches daher auch der Wert von λ sein mag, jene beiden Verbindungslinien schneiden sich immer auf der Abscissenachse und zwar in dem Abstand $\xi_0 = (1 - \lambda^2)\,x'$ vom Koordinatenanfang.

Liegt die Kurve zugleich symmetrisch zur Ordinatenachse, so hat man noch die Gleichungen:

$$\begin{aligned} \lambda\eta - \xi + (1 - \lambda^2)\,x' &= 0 \\ -\lambda\eta - \xi - (1 - \lambda^2)\,x' &= 0 \\ \xi \qquad\qquad\qquad &= 0, \end{aligned}$$

deren Summe, wenn man die letzte mit 2 multipliziert, wiederum identisch gleich Null ist. Also schneidet sich das andere Paar von Verbindungslinien auf der Ordinatenachse und zwar in dem Abstand $\eta_0 = -\frac{(1 - \lambda^2)\,x'}{\lambda}$ vom Koordinatenanfang. Das Verhältnis der beiden Abstände ist $\frac{\xi_0}{\eta_0} = -\lambda$.

Bei der großen Mannigfaltigkeit von Fällen, welche die Gegenkurven der Kegelschnitte je nach Art der Grundkurve und des Koordinatensystems so wie nach der Lage des Koordinatenanfangs und der Größe der Konstanten augenscheinlich darbieten, werden im allgemeinen die einfachsten und regelmäßigsten Formen dann entstehen, wenn die Koordinatenachsen mit den Kegelschnittsachsen zusammenfallen.

§ 4.

Gegenkurve des Kreises.

Erster Fall. Der Koordinatenanfang liegt in der Peripherie des Kreises.

Fig. 2. Wenn der Anfangspunkt rechtwinkliger Koordinaten in der Peripherie des Kreises liegt und α und β die Mittelpunktskoordinaten bedeuten, so ist die Gleichung des

Kreises: $x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y = 0$. Verbindet man mit derselben die beiden Transformationsgleichungen $x = \xi\,\frac{\xi^2 + \eta^2}{\xi^2 - \eta^2}$, $y = -\eta\,\frac{\xi^2 + \eta^2}{\xi^2 - \eta^2}$, so ergiebt sich als Gleichung der Gegenkurve: $[(\xi^2 + \eta^2)^2 - 2(\alpha\xi - \beta\eta)(\xi^2 - \eta^2)](\xi^2 + \eta^2) = 0$. Dieselbe zerfällt daher in die Kurve vierter Ordnung $(\xi^2 + \eta^2)^2 - 2(\alpha\xi - \beta\eta)(\xi^2 - \eta^2) = 0$ und zwei durch den Koordinatenanfang O gehende imaginäre Gerade $\eta \pm i\,\xi = 0$. Die Kurve besteht aus drei Blättern, welche im Koordinatenanfang durch einen dreifachen Punkt vereinigt sind, in welchem drei Zweige zusammentreffen. Sowohl die Involutionsachsen, als auch der Strahl $\alpha\xi - \beta\eta = 0$, welcher konjugiert ist zu der Tangente des Kreises in O, haben im Koordinatenanfang je vier Punkte mit der Kurve gemein, sind also Tangenten derselben. Ein Strahl $y - \lambda x = 0$ schneidet den Kreis in dem Punkte $x' = \frac{2(\alpha + \beta\lambda)}{1 + \lambda^2}$, $y' = \lambda x'$, folglich ist nach § 3 die Gleichung der Verbindungslinie $P'P_1$ zweier entsprechender Punkte: $\eta - \frac{1}{\lambda}\,\xi + \frac{1 - \lambda^2}{\lambda}\,\frac{2(\alpha + \beta\lambda)}{1 + \lambda^2} = 0$ oder

$$(\lambda\eta - \xi)(1 + \lambda^2) + 2(1 - \lambda^2)(\alpha + \beta\lambda) = 0.$$

Durch bloße Vertauschung von λ mit $-\lambda$ erhält man die Gleichung der Verbindungslinie $P''P_2$ des mit jenem Paare zusammengehörigen Paares entsprechender Punkte:

$$(-\lambda\eta - \xi)(1 + \lambda^2) + 2(1 - \lambda^2)(\alpha - \beta\lambda) = 0.$$

Eliminiert man λ aus diesen beiden Gleichungen, so folgt: $\alpha\eta + \beta\xi = 0$. Also liegen die Schnittpunkte der Linien $P'P_1$ und $P''P_2$ auf demjenigen durch O gelegten Strahl, welcher zu dem nach dem Mittelpunkt des Kreises gerichteten konjugiert ist. Außerdem erkennt man leicht, daß der Schnittpunkt der Verbindungslinien $P'P''$ der einzelnen Punktepaare im vorliegenden Falle in unendliche Entfernung rückt. Es möge daher noch der geometrische Ort für den Durchschnitt der Geraden $P'P''$ und P_1P_2 des durch zwei zusammengehörige Paare entsprechender Punkte bestimmten Kreisvierecks gesucht werden. Nun sind die Koordinaten von P', wie oben angegeben, $x' = \frac{2(\alpha + \beta\lambda)}{1 + \lambda^2}$, $y' = \lambda x'$, die von P'' demnach

$$x'' = \frac{2(\alpha - \beta\lambda)}{1 + \lambda^2},\quad y'' = -\lambda x''.$$

Ebenso sind die Koordinaten des Punktes P_1, in welchem die Gegenkurve von dem Strahl $\eta + \lambda\xi = 0$ geschnitten wird, $\xi' = \frac{2(\alpha + \beta\lambda)(1 - \lambda^2)}{(1 + \lambda^2)^2}$, $\eta' = -\lambda\xi'$, die von P_2 demnach

$$\xi'' = \frac{2(\alpha - \beta\lambda)(1 - \lambda^2)}{(1 + \lambda^2)^2},\quad \eta'' = \lambda\xi''.$$

Mithin ist die Gleichung von $P'P''$:

$$\eta - \lambda x' = \frac{\alpha}{\beta}(\xi - x') \text{ oder } (\alpha\xi - \beta\eta)(1 + \lambda^2) - 2(\alpha^2 - \beta^2\lambda^2) = 0;$$

ebenso die von P_1P_2:

$$\eta + \lambda\xi' = -\frac{\alpha}{\beta}(\xi - \xi') \text{ oder } (\alpha\xi + \beta\eta)(1 + \lambda^2)^2 - 2(\alpha^2 - \beta^2\lambda^2)(1 - \lambda^2) = 0.$$

Daraus folgt: $\lambda^2 = -\dfrac{\beta\eta}{\alpha\xi}$ und als Gleichung der Durchschnittslinie:

$$(\alpha\xi - \beta\eta)^2 - 2\,(\alpha^3\xi + \beta^3\eta) = 0,$$

die Gleichung einer Parabel, welche durch den Koordinatenanfang O und die beiden anderen der Kurve und Gegenkurve gemeinsamen Punkte A und B geht.

Wenn $\beta = \alpha$ ist (Fig. 3), d. h. wenn der durch O gelegte Durchmesser des Kreises den Koordinatenwinkel halbiert oder die Abschnitte der Achsen einander gleich sind, wird die Gleichung des Kreises $x^2 + y^2 - 2\alpha\,(x + y) = 0$ und die der Gegenkurve

$$(\xi^2 + \eta^2)^2 - 2\alpha\,(\xi - \eta)^2\,(\xi + \eta) = 0.$$

Die Gegenkurve besteht alsdann nur aus zwei Blättern und die eine Involutionsachse $\xi - \eta = 0$ wird Rückkehrtangente. Die Parabelgleichung nimmt jetzt die einfachere Form an: $(\xi - \eta)^2 - 2\alpha\,(\xi + \eta) = 0$; transformiert man dieselbe auf die Involutionsachsen vermittelst der Gleichungen: $\xi = (X - Y)\sqrt{\tfrac{1}{2}}$, $\eta = (X + Y)\sqrt{\tfrac{1}{2}}$, so lautet sie: $Y^2 = \alpha\sqrt{2}\,X$ oder $Y^2 = aX$, wenn a den Radius des Kreises bedeutet. In diesem Falle ist daher O der Scheitel der Parabel, und ihr Brennpunkt liegt auf dem zu O gehörigen Kreisradius in der Entfernung $\dfrac{a}{4}$.

Wird $\beta = 0$ angenommen (Fig. 4), so liegt der Kreis symmetrisch zur Abscissenachse und α wird gleich a, dem Radius des Kreises; dann heißt die Gleichung der Grundkurve: $x^2 + y^2 - 2ax = 0$ und die der Gegenkurve: $(\xi^2 + \eta^2)^2 - 2a\xi\,(\xi^2 - \eta^2) = 0$. Die Gegenkurve bildet jetzt auf der Seite der positiven Abscissen zwei Zweige oder ein Blatt, auf der Seite der negativen Abscissen aber zwei Blätter. Außer den Involutionsachsen ist auch die Ordinatenachse Tangente der Gegenkurve im Koordinatenanfang. Die Gerade $a\eta + \beta\xi = 0$ geht über in $\eta = 0$, und die Parabel zerfällt in die beiden Geraden: $\xi = 0$ und $\xi - 2a = 0$.

Verbindet man die Gleichung des Kreises $x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y = 0$ mit den Transformationsgleichungen $x = \varrho\,\dfrac{\cos\vartheta}{\cos 2\vartheta}$, $y = -\varrho\,\dfrac{\sin\vartheta}{\cos 2\vartheta}$, so erhält man die Gleichung der Gegenkurve in Polarkoordinaten: $\varrho = 2\,(\alpha\cos\vartheta - \beta\sin\vartheta)\cos 2\vartheta$. Will man die Maximal- oder Minimalworte von ϱ bestimmen, so ist

$$\frac{d\varrho}{d\vartheta} = -4\,(\alpha\cos\vartheta - \beta\sin\vartheta)\sin 2\vartheta - 2\,(\alpha\sin\vartheta + \beta\cos\vartheta)\cos 2\vartheta,$$

$$\frac{d^2\varrho}{d\vartheta^2} = 8\,(\alpha\sin\vartheta + \beta\cos\vartheta)\sin 2\vartheta - 10\,(\alpha\cos\vartheta - \beta\sin\vartheta)\cos 2\vartheta.$$

Aus $\dfrac{d\varrho}{d\vartheta} = 0$ folgt für $\operatorname{tg}\vartheta$ die Gleichung dritten Grades: $\operatorname{tg}^3\vartheta + \dfrac{5\beta}{\alpha}\operatorname{tg}^2\vartheta - 5\operatorname{tg}\vartheta - \dfrac{\beta}{\alpha} = 0$, welche sich für $\beta = \alpha$ vereinfacht in: $(\operatorname{tg}\vartheta - 1)\,(\operatorname{tg}^2\vartheta + 6\operatorname{tg}\vartheta + 1) = 0$. Daraus erhält man die drei Werte:

$$\operatorname{tg}\vartheta = 1, \quad \operatorname{tg}\vartheta = -3 + 2\sqrt{2}, \quad \operatorname{tg}\vartheta = -3 - 2\sqrt{2}$$
$$\text{oder } \vartheta = 45^0, \quad \vartheta = -9^0\,44',2, \quad \vartheta = 99^0\,44',2.$$

Substituiert man diese drei Werte von ϑ in das zweite Differentialverhältnis:

$$\frac{d^2\varrho}{d\vartheta^2} = 8\alpha\,(\sin\vartheta + \cos\vartheta)\,\sin 2\vartheta - 10\alpha\,(\cos\vartheta - \sin\vartheta)\,\cos 2\vartheta$$
$$= 8\alpha\sqrt{2}\,\cos(\vartheta - 45^0)\,\sin 2\vartheta + 10\alpha\sqrt{2}\,\sin(\vartheta - 45^0)\,\cos 2\vartheta,$$

so wird dasselbe im ersten Falle positiv, in den beiden anderen Fällen negativ; folglich entspricht der erste Wert von ϑ einem Minimum, der zweite und dritte einem Maximum der Funktion. Da die Gleichung der Gegenkurve

$\varrho = a\sqrt{2}\,(\cos\vartheta - \sin\vartheta)\,\cos 2\vartheta = a\sqrt{2}\,\dfrac{(1 - \operatorname{tg}\vartheta)\,(1 - \operatorname{tg}^2\vartheta)}{(1 + \operatorname{tg}^2\vartheta)^{\frac{3}{2}}}$, wobei $a^2 = 2\alpha^2$, so erhält man für die zugehörigen Radii vectores die Werte:

$$\varrho = 0,\ \varrho = \tfrac{8}{9}\,a\sqrt{3}\,\frac{5\sqrt{2} - 7}{(3 - 2\sqrt{2})^{\frac{3}{2}}} = \tfrac{8}{9}\,a\sqrt{3},\ \varrho = \tfrac{8}{9}\,a\sqrt{3}\,\frac{-5\sqrt{2} - 7}{(3 + 2\sqrt{2})^{\frac{3}{2}}} = \tfrac{8}{9}\,a\sqrt{3}.$$

Die Gleichung des Kreises ist $r = a\sqrt{2}\,(\cos\varphi + \sin\varphi) = a\sqrt{2}\,\dfrac{1 + \operatorname{tg}\varphi}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\varphi}}$. Setzt man nacheinander $\operatorname{tg}\varphi = -1$, $\operatorname{tg}\varphi = 3 - 2\sqrt{2}$, $\operatorname{tg}\varphi = 3 + 2\sqrt{2}$, so findet man, daß jene drei Werte von ϱ den Werten $r = 0$, $r = \tfrac{2}{3}\,a\sqrt{6}$, $r = \tfrac{2}{3}\,a\sqrt{6}$ des Kreises entsprechen.

Für $\beta = 0$ und $\alpha = a$ ergiebt sich aus

$$\frac{d\varrho}{d\vartheta} = -2a\,(2\cos\vartheta\sin 2\vartheta + \sin\vartheta\cos 2\vartheta) = 0$$
$$2\operatorname{tg} 2\vartheta + \operatorname{tg}\vartheta = 0 \text{ oder } (5 - \operatorname{tg}^2\vartheta)\operatorname{tg}\vartheta = 0,$$
$$\text{also } \operatorname{tg}\vartheta = 0, \quad \operatorname{tg}\vartheta = +\sqrt{5}, \quad \operatorname{tg}\vartheta = -\sqrt{5}$$
$$\text{oder } \vartheta = 0, \quad \vartheta = 245^0\,54',3, \quad \vartheta = 114^0\,5',7.$$

Substituiert man diese Werte von ϑ in das zweite Differentialverhältnis

$$\frac{d^2\varrho}{d\vartheta^2} = 2a\,(4\sin\vartheta\sin 2\vartheta - 5\cos\vartheta\cos 2\vartheta),$$

so wird dasselbe jedesmal negativ, folglich entspricht jeder dieser Werte einem Maximum der Funktion.

Da die Gleichung der Gegenkurve $\varrho = 2a\cos\vartheta\cos 2\vartheta = 2a\,\dfrac{1 - \operatorname{tg}^2\vartheta}{(1 + \operatorname{tg}^2\vartheta)^{\frac{3}{2}}}$, so erhält man die zugehörigen Werte $\varrho = 2a$, $\varrho = \tfrac{2}{9}\,a\sqrt{6}$, $\varrho = \tfrac{2}{9}\,a\sqrt{6}$, welche, da die Gleichung des Kreises $r = 2a\cos\varphi = \dfrac{2a}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\varphi}}$, den Radii vectores $r = 2a$, $r = \dfrac{a}{3}\sqrt{6}$, $r = \dfrac{a}{3}\sqrt{6}$ der Grundkurve entsprechen.

Um die Fläche der Gegenkurve zu berechnen, hat man allgemein:

$$\tfrac{1}{2}\int\varrho^2 d\vartheta = 2\int(\alpha\cos\vartheta - \beta\sin\vartheta)^2\cos^2 2\vartheta\,d\vartheta$$
$$= 2\int\Big[\big((\alpha^2 - \beta^2)\cos^2\vartheta + \beta^2\big)\,(4\cos^4\vartheta - 4\cos^2\vartheta + 1) - \alpha\beta\cos^2 2\vartheta\sin 2\vartheta\Big]\,d\vartheta$$
$$= 8\,(\alpha^2 - \beta^2)\int\cos^6\vartheta\,d\vartheta - 8\,(\alpha^2 - 2\beta^2)\int\cos^4\vartheta\,d\vartheta + 2\,(\alpha^2 - 5\beta^2)\int\cos^2\vartheta\,d\vartheta$$
$$- 2\alpha\beta\int\cos^2 2\vartheta\sin 2\vartheta\,d\vartheta + 2\beta^2\int d\vartheta.$$

Nun ist $\displaystyle\int\cos^n\vartheta\,d\vartheta = \cos^{n-1}\vartheta\sin\vartheta + (n-1)\int\sin^2\vartheta\cos^{n-2}\vartheta\,d\vartheta$

$$= \cos^{n-1}\vartheta\sin\vartheta + (n-1)\int\cos^{n-2}\vartheta\,d\vartheta - (n-1)\int\cos^n\vartheta\,d\vartheta$$
$$= \frac{1}{n}\cos^{n-1}\vartheta\sin\vartheta + \frac{n-1}{n}\int\cos^{n-2}\vartheta\,d\vartheta;\ \text{folglich}$$

$$\int \cos^2\vartheta\, d\vartheta = \tfrac{1}{2}\cos\vartheta \sin\vartheta + \tfrac{1}{2}\vartheta,$$

$$\int \cos^4\vartheta\, d\vartheta = \tfrac{1}{4}\cos^3\vartheta \sin\vartheta + \tfrac{3}{4}\cdot\tfrac{1}{2}\cos\vartheta\sin\vartheta + \tfrac{3}{4}\cdot\tfrac{1}{2}\vartheta,$$

$$\int \cos^6\vartheta\, d\vartheta = \tfrac{1}{6}\cos^5\vartheta\sin\vartheta + \tfrac{5}{6}\cdot\tfrac{1}{4}\cos^3\vartheta\sin\vartheta + \tfrac{5}{6}\cdot\tfrac{3}{4}\cdot\tfrac{1}{2}\cos\vartheta\sin\vartheta + \tfrac{5}{6}\cdot\tfrac{3}{4}\cdot\tfrac{1}{2}\vartheta;$$

außerdem ist $\int \cos^2 2\vartheta \sin 2\vartheta\, d\vartheta = -\tfrac{1}{6}\cos^3 2\vartheta$. Demnach

$$\tfrac{1}{2}\int \varrho^2\, d\vartheta = \tfrac{4}{3}(\alpha^2-\beta^2)\cos^5\vartheta\sin\vartheta - \tfrac{1}{3}(\alpha^2 - 7\beta^2)\cos^3\vartheta\sin\vartheta$$
$$+ \tfrac{1}{2}(\alpha^2-3\beta^2)\cos\vartheta\sin\vartheta + \tfrac{1}{3}\alpha\beta\cos^3 2\vartheta + \tfrac{1}{2}(\alpha^2+\beta^2)\vartheta + \text{Const.}$$

Daraus ergiebt sich für die einzelnen Flächenteile:

$$\tfrac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \varrho^2\, d\vartheta = \frac{\pi}{8}(\alpha^2+\beta^2) + \frac{1}{3}(\alpha^2-\beta^2) - \frac{1}{3}\alpha\beta,$$

$$\tfrac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} \varrho^2\, d\vartheta = \frac{\pi}{8}(\alpha^2+\beta^2) + \frac{1}{3}(\alpha^2-\beta^2) + \frac{1}{3}\alpha\beta;$$

$$\tfrac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{4}\pi} \varrho^2\, d\vartheta = \frac{\pi}{8}(\alpha^2+\beta^2) - \frac{1}{3}(\alpha^2-\beta^2) + \frac{1}{3}\alpha\beta,$$

$$\tfrac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \varrho^2\, d\vartheta = \frac{\pi}{8}(\alpha^2+\beta^2) - \frac{1}{3}(\alpha^2-\beta^2) - \frac{1}{3}\alpha\beta.$$

Mithin ist das eine Blatt $\tfrac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \varrho^2\, d\vartheta = \frac{\pi}{4}(\alpha^2+\beta^2) + \frac{2}{3}(\alpha^2-\beta^2)$ und die Summe der beiden anderen $\tfrac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} \varrho^2\, d\vartheta = \frac{\pi}{4}(\alpha^2+\beta^2) - \frac{2}{3}(\alpha^2-\beta^2)$, also die Gesamtfläche der Gegenkurve gleich $(\alpha^2+\beta^2)\frac{\pi}{2}$ oder $\frac{a^2\pi}{2}$, d. h. gleich der Hälfte des Grundkreises.

Vergleicht man die einzelnen Flächen der Reihe nach mit den entsprechenden, d. h. mit den durch den konjugierten Strahl beschriebenen Kreisflächen, so ist $r = 2(\alpha\cos\varphi + \beta\sin\varphi)$, also

$$\tfrac{1}{2}\int r^2 d\varphi = 2\alpha^2\int \cos^2\varphi\, d\varphi + 4\alpha\beta\int \cos\varphi\sin\varphi\, d\varphi + 2\beta^2\int \sin^2\varphi\, d\varphi.$$

Es ist aber $\int \cos^2\varphi\, d\varphi = \tfrac{1}{2}\cos\varphi\sin\varphi + \tfrac{1}{2}\varphi$, $\int \cos\varphi\sin\varphi\, d\varphi = \tfrac{1}{2}\sin^2\varphi$,

$\int \sin^2\varphi\, d\varphi = \frac{\varphi}{2} - \tfrac{1}{2}\cos\varphi\sin\varphi$. Folglich

$$\tfrac{1}{2}\int r^2 d\varphi = (\alpha^2+\beta^2)\varphi + (\alpha^2-\beta^2)\cos\varphi\sin\varphi + 2\alpha\beta\sin^2\varphi.$$

Demnach $\tfrac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} r^2 d\varphi = \frac{\pi}{4}(\alpha^2+\beta^2) + \frac{1}{2}(\alpha^2-\beta^2) - \alpha\beta,$

$$\tfrac{1}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} r^2 d\varphi = \frac{\pi}{4}(\alpha^2+\beta^2) + \frac{1}{2}(\alpha^2-\beta^2) + \alpha\beta;$$

$$\tfrac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} r^2 d\varphi = \frac{\pi}{4}(\alpha^2+\beta^2) - \frac{1}{2}(\alpha^2-\beta^2) + \alpha\beta,$$

$$\tfrac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{4}\pi} r^2 d\varphi = \frac{\pi}{4}(\alpha^2+\beta^2) - \frac{1}{2}(\alpha^2-\beta^2) - \alpha\beta.$$

Mithin entspricht der einen Schleife die Fläche $\frac{\pi}{2}(\alpha^2+\beta^2) + \alpha^2 - \beta^2$ oder $\frac{a^2\pi}{2} + \alpha^2 - \beta^2$ und der Summe der beiden anderen die aus zwei Segmenten bestehende Fläche $\frac{\pi}{2}(\alpha^2+\beta^2) - (\alpha^2-\beta^2)$ oder $\frac{a^2\pi}{2} - (\alpha^2-\beta^2)$ des Kreises.

Ist $\beta = \alpha$, so folgt, indem man $\alpha^2 = \tfrac{1}{2}a^2$ setzt:

$$\tfrac{1}{2}\int \varrho^2 d\vartheta = \frac{a^2}{2}\left(2\cos^3\vartheta\sin\vartheta - \cos\vartheta\sin\vartheta + \tfrac{1}{3}\cos^3 2\vartheta + \vartheta\right) + \text{Const.},$$

also $\tfrac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \varrho^2 d\vartheta = \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{3}\right)\frac{a^2}{2}$ entsprechend $\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)\frac{a^2}{2}$,

$$\tfrac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} \varrho^2 d\vartheta = \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{3}\right)\frac{a^2}{2} \text{ entsprechend } \left(\frac{\pi}{2} + 1\right)\frac{a^2}{2};$$

$$\tfrac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{4}\pi} \varrho^2 d\vartheta = \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{3}\right)\frac{a^2}{2} \text{ entsprechend } \left(\frac{\pi}{2} + 1\right)\frac{a^2}{2},$$

$$\tfrac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \varrho^2 d\vartheta = \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{3}\right)\frac{a^2}{2} \text{ entsprechend } \left(\frac{\pi}{2} - 1\right)\frac{a^2}{2}.$$

Mithin ist in diesem Falle jedes Blatt gleich $\frac{a^2\pi}{4}$ entsprechend dem Halbkreise $\frac{a^2\pi}{2}$.

Wird $\beta = 0$ gesetzt und $\alpha = a$, so folgt:

$$\tfrac{1}{2}\int \varrho^2\, d\vartheta = a^2\left(\tfrac{4}{3}\cos^5\vartheta\sin\vartheta - \tfrac{1}{3}\cos^3\vartheta\sin\vartheta + \tfrac{1}{2}\cos\vartheta\sin\vartheta + \tfrac{1}{2}\vartheta\right) + \text{Const.},$$

$$\text{also } \tfrac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \varrho^2\, d\vartheta = \left(\frac{\pi}{8}+\frac{1}{3}\right)a^2 \text{ entsprechend } \left(\frac{\pi}{2}+1\right)\frac{a^2}{2},$$

$$\tfrac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} \varrho^2\, d\vartheta = \left(\frac{\pi}{8}+\frac{1}{3}\right)a^2 \text{ entsprechend } \left(\frac{\pi}{2}+1\right)\frac{a^2}{2};$$

$$\tfrac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{4}\pi} \varrho^2\, d\vartheta = \left(\frac{\pi}{8}-\frac{1}{3}\right)a^2 \text{ entsprechend } \left(\frac{\pi}{2}-1\right)\frac{a^2}{2},$$

$$\tfrac{1}{2}\int_{\frac{5}{4}\pi}^{\frac{3}{2}\pi} \varrho^2\, d\vartheta = \left(\frac{\pi}{8}-\frac{1}{3}\right)a^2 \text{ entsprechend } \left(\frac{\pi}{2}-1\right)\frac{a^2}{2}.$$

Mithin ist in diesem Falle die große Schleife gleich $\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2}{3}\right)a^2$ entsprechend der Kreisfläche $\left(\frac{\pi}{2}+1\right)a^2$ und die Summe der beiden kleinen Schleifen gleich $\left(\frac{\pi}{4}-\frac{2}{3}\right)a^2$ entsprechend der Kreisfläche $\left(\frac{\pi}{2}-1\right)a^2$.

§ 5.

Gegenkurve des Kreises,

Zweiter Fall. Der Koordinatenanfang liegt im Mittelpunkt des Kreises.

Fig. 5. Wenn der Anfangspunkt schiefwinkliger Koordinaten im Mittelpunkt des Kreises liegt, so ist die Gleichung der Grundkurve: $x^2 + 2xy\cos\omega + y^2 = a^2$ und die der Gegenkurve: $(\xi^2 - 2\xi\eta\cos\omega + \eta^2)(\xi^2 + 2\xi\eta\cos\omega + \eta^2)^2 = a^2(\xi^2 - \eta^2)^2$. Die vier Blätter, aus welchen die Gegenkurve besteht, vereinigen sich im Koordinatenanfang und bilden daselbst durch das Zusammentreffen von vier Zweigen einen vierfachen Punkt. Ein Strahl $y - \lambda x = 0$ schneidet den Kreis in den Punkten $x' = \pm\frac{a}{\sqrt{1 + 2\lambda\cos\omega + \lambda^2}}$, $y' = \lambda x'$, folglich ist die Gleichung der Verbindungslinie zweier entsprechender Punkte

$$\eta + \frac{1 - \lambda\cos\omega}{\cos\omega - \lambda}\,\xi \mp \frac{1-\lambda^2}{\cos\omega - \lambda}\cdot\frac{a}{\sqrt{1 + 2\lambda\cos\omega + \lambda^2}} = 0$$

oder $(\xi + \eta\cos\omega - (\eta + \xi\cos\omega)\lambda)\sqrt{1 + 2\lambda\cos\omega + \lambda^2} \mp a(1 - \lambda^2) = 0$ und die Gleichung der Verbindungslinie des mit jenem Paare entsprechender Punkte zusammengehörigen Paares

$$(\xi + \eta\cos\omega + (\eta + \xi\cos\omega)\lambda)\sqrt{1 - 2\lambda\cos\omega + \lambda^2} \mp a(1 - \lambda^2) = 0.$$

Mithin ist $[(\xi+\eta\cos\omega)^2 - 2(\xi+\eta\cos\omega)(\eta+\xi\cos\omega)\lambda + (\eta+\xi\cos\omega)^2\lambda^2](1+2\lambda\cos\omega+\lambda^2) =$
$[(\xi+\eta\cos\omega)^2 + 2(\xi+\eta\cos\omega)(\eta+\xi\cos\omega)\lambda + (\eta+\xi\cos\omega)^2\lambda^2](1-2\lambda\cos\omega+\lambda^2)$,
woraus nach einigen Umformungen folgt:

$$\lambda^2 = -\frac{\eta(\xi + \eta\cos\omega)}{\xi(\eta + \xi\cos\omega)}.$$

Substituiert man diesen Wert in eine der obigen Gleichungen für die Verbindungslinien entsprechender Punkte, so ergiebt sich als Ort der Schnittpunkte je zweier zusammengehöriger Verbindungslinien eine Kurve sechster Ordnung, dargestellt durch die Gleichung:

$$[(\xi^2 - \eta^2)^2 + 4\xi\eta(\xi + \eta\cos\omega)(\eta + \xi\cos\omega)](\xi + \eta\cos\omega)(\eta + \xi\cos\omega)\cos\omega$$
$$= a^2(2\xi\eta + (\xi^2 + \eta^2)\cos\omega)^2.$$

Dieselbe geht durch den Koordinatenanfang und hat mit der Grund- und Gegenkurve die Schnittpunkte der Achsen gemein.

Legt man rechtwinklige Koordinaten zu Grunde (Fig. 6), so geht diese Durchschnittskurve in die beiden Koordinatenachsen $\xi = 0$ und $\eta = 0$ über. Die Gleichung der Gegenkurve wird in diesem Falle $(\xi^2 + \eta^2)^3 = a^2(\xi^2 - \eta^2)^2$ entsprechend der Kreisgleichung $x^2 + y^2 = a^2$. Es ist jetzt $x' = \pm\frac{a}{\sqrt{1+\lambda^2}}$, und die auf den Achsen liegenden Schnittpunkte der Verbindungslinien entsprechender zusammengehöriger Punkte haben vom Koordinatenanfang die gleichen Abstände $\xi_0 = \pm\frac{a(1-\lambda^2)}{\sqrt{1+\lambda^2}}$ und $\eta_0 = \mp\frac{a(1-\lambda^2)}{\lambda\sqrt{1+\lambda^2}}$. Der Flächeninhalt des durch diese Verbindungslinien begrenzten Parallelogramms ist gleich $\frac{2a^2(1-\lambda^2)^2}{\lambda(1+\lambda^2)}$. Derselbe wird gleich der Fläche des Grundkreises unter der Bedingung: $\frac{2(1-\lambda^2)^2}{\lambda(1+\lambda^2)} = \pi$ oder

$$2\lambda^4 - \pi\lambda^3 - 4\lambda^2 - \pi\lambda + 2 = 0.$$

Setzt man in dieser reziproken Gleichung vierten Grades $\lambda + \frac{1}{\lambda} = \varkappa$ oder $\lambda = \frac{\varkappa}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\varkappa}{2}\right)^2 - 1}$, so geht sie über in: $\varkappa^2 - \frac{\pi}{2}\varkappa - 4 = 0$, woraus folgt: $\varkappa = \frac{\pi}{4} + \sqrt{\left(\frac{\pi}{4}\right)^2 + 4}$. Eine analoge Bedingungsgleichung würde sich ergeben, wenn man die Fläche des Parallelogramms der Fläche der Gegenkurve gleich setzte.

In Polarkoordinaten ergiebt sich als Gleichung der Gegenkurve des Kreises, da $r = a$ ist, nach § 2 unmittelbar $\varrho = a\cos 2\vartheta$. *) Aus der Gleichung folgt, daß $\varrho = 0$ für $\vartheta = \frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi, \frac{5}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi$, daß also, wie es sein muß, die Kurve viermal durch den Mittelpunkt des Kreises geht. Außerdem ist ersichtlich, daß sie aus vier gleichen zu den Achsen symmetrisch liegenden Blättern besteht. Bezeichnet man mit τ den Winkel, welchen die Tangente einer Kurve mit der positiven Abscissen-

*) Auf die Involutionsachsen transformiert heißt die Gleichung $\rho = a\sin 2\vartheta$. Auf Grund dieser Gleichung hat nach dem Vorgange von Guido Grandi, flores geometrici Florent. 1725, G. Cramer, Introd. à l'analyse des lignes courbes algébriques, Genève 1750 S. 414 die vorliegende Kurve konstruiert.

achse einschließt, so ist bekanntlich $\operatorname{tg}(\tau - \vartheta) = \frac{\varrho\, d\vartheta}{d\varrho}$; da hier $\frac{d\varrho}{d\vartheta} = -2a \sin 2\vartheta$, so folgt: $\operatorname{tg}(\tau - \vartheta) = -\frac{1}{2 \operatorname{tg} 2\vartheta}$ oder $\operatorname{tg}\tau = \frac{5 \operatorname{tg}^2\vartheta - 1}{\operatorname{tg}\vartheta\,(5 - \operatorname{tg}^2\vartheta)}$. Für $\vartheta = 0$ und $\vartheta = \pi$ ist $\operatorname{tg}\tau = \infty$, für $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ und $\vartheta = \frac{3}{2}\pi$ ist $\operatorname{tg}\tau = 0$. Also hat die Gegenkurve mit dem Kreise in den Punkten, wo beide von den Koordinatenachsen geschnitten werden, gemeinschaftliche zu den Achsen parallele Tangenten. Da $\operatorname{tg}\tau = 1$ ist für $\vartheta = \frac{\pi}{4}$ und $\vartheta = \frac{5}{4}\pi$, ebenso $\operatorname{tg}\tau = -1$ für $\vartheta = \frac{3}{4}\pi$ und $\vartheta = \frac{7}{4}\pi$, so ergiebt sich von neuem, daß die Tangenten der Gegenkurve im Koordinatenanfang mit den Involutionsachsen zusammenfallen. Es stehen daher je zwei im Mittelpunkte sich schneidende Zweige der Kurve auf einander senkrecht, die anderen berühren einander. Außerdem wird $\operatorname{tg}\tau = 0$, d. h. die Tangente parallel der Abscissenachse, wenn $\operatorname{tg}\vartheta = \pm\sqrt{\frac{1}{5}}$ oder $\vartheta = \pm 24^0\,5',7$. Die beiden konjugierten Strahlen schneiden den Kreis in den Punkten: $x = \pm a\sqrt{\frac{5}{6}}$, $y = \pm a\sqrt{\frac{1}{6}}$, und es gehören ihnen zu die Werte $\varrho = \frac{2}{3}a$, $r = a$, so daß $\varrho : r = 2 : 3$. Ebenso wird $\operatorname{tg}\tau = \infty$, d. h. die Tangente parallel der Ordinatenachse, wenn $\operatorname{tg}\vartheta = \pm\sqrt{5}$ oder $\vartheta = 65^0\,54',3$. Die beiden konjugierten Strahlen schneiden den Kreis in den Punkten: $x = \pm a\sqrt{\frac{1}{6}}$, $y = \pm a\sqrt{\frac{5}{6}}$, und es gehören ihnen gleichfalls zu die Werte $\varrho = \frac{2}{3}a$, $r = a$.

Da $\frac{d\varrho}{d\vartheta} = 2a \sin\vartheta$ und $\frac{d^2\varrho}{d\vartheta^2} = -4a\cos 2\vartheta$, so ist der Krümmungshalbmesser

$$P = \frac{\left[\varrho^2 + \left(\frac{d\varrho}{d\vartheta}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\varrho^2 + 2\left(\frac{d\varrho}{d\vartheta}\right)^2 - \varrho\,\frac{d^2\varrho}{d\vartheta^2}} = \frac{a\,(\cos^2 2\vartheta + 4\sin^2 2\vartheta)^{\frac{3}{2}}}{5\cos^2 2\vartheta + 8\sin^2 2\vartheta} = \frac{a\,(1 + 3\sin^2 2\vartheta)^{\frac{3}{2}}}{5 + 3\sin^2 2\vartheta}.$$

Setzt man $\vartheta = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3}{2}\pi$, so erkennt man, daß in den vier Punkten, in welchen der Kreis von seiner Gegenkurve berührt wird, der Krümmungsradius der letzteren gleich $\frac{1}{5}a$ ist. Die Mittelpunkte dieser vier Krümmungskreise haben daher vom Mittelpunkte des gegebenen Kreises die Entfernung $\frac{4}{5}a$.

Zur Quadratur der vierschlingigen Linie hat man: $\frac{1}{2}\int \varrho^2\, d\vartheta = \frac{a^2}{2}\int \cos^2 2\vartheta\, d\vartheta = \frac{a^2}{4}\int (\cos 4\vartheta + 1)\, d\vartheta = \frac{a^2}{4}\left(\frac{1}{4}\sin 4\vartheta + \vartheta\right) + \text{Const.}$ Nimmt man dieses Integral von $\vartheta = 0$ bis $\vartheta = \frac{\pi}{4}$, so folgt, daß der achte Teil der Fläche gleich $\frac{a^2\pi}{16}$, also jedes Blatt gleich $\frac{a^2\pi}{8}$ und die Gesamtfläche gleich $\frac{a^2\pi}{2}$ ist. Also ist die Fläche dieser Gegenkurve wieder gerade halb so groß als die der Grundkurve und die Kreisfläche wird durch die Gegenkurve in acht gleiche Teile geteilt.

Das Differential des Bogens der Kurve in Polarkoordinaten ausgedrückt ist

$$ds = \sqrt{\varrho^2 + \left(\frac{d\varrho}{d\vartheta}\right)^2}\, d\vartheta = \sqrt{a^2\cos^2 2\vartheta + 4a^2\sin^2 2\vartheta}\, d\vartheta = a\sqrt{4 - 3\cos^2 2\vartheta}\, d\vartheta$$
$$= 2a\sqrt{1 - \tfrac{3}{4}\cos^2 2\vartheta}\, d\vartheta = 2a\sqrt{1 - \tfrac{3}{4}\sin^2\left(\tfrac{\pi}{2} - 2\vartheta\right)}\, d\vartheta.$$

Setzt man $\frac{\pi}{2} - 2\vartheta = \psi$,

also $d\vartheta = -\frac{1}{2}\, d\psi$, so ist $s = -a\int_{\psi_1}^{\psi_2} \sqrt{1 - \frac{3}{4}\sin^2\psi}\, d\psi = a\int_{\psi_2}^{\psi_1} \sqrt{1 - \frac{3}{4}\sin^2\psi}\, d\psi$ $= a\,[\mathrm{E}(\psi_1) - \mathrm{E}(\psi_2)]$, wenn man unter $E(\psi)$ das elliptische Integral der zweiten Gattung versteht, dessen Modul $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ ist. Entwickelt man $(1 - \frac{3}{4}\sin^2\psi)^{\frac{1}{2}}$ in eine Reihe, so folgt:

$$s = a\left[\psi_1 - \psi_2 - \int_{\psi_2}^{\psi_1} d\psi\left(\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{3}{4}\sin^2\psi + \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{4}\cdot\left(\tfrac{3}{4}\right)^2\sin^4\psi + \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{3}{4}\cdot\tfrac{1}{6}\cdot\left(\tfrac{3}{4}\right)^3\sin^6\psi + \ldots\right)\right].$$

Nun ist nach der Reductionsformel

$$\int \sin^n\psi\, d\psi = -\frac{1}{n}\sin^{n-1}\psi\cos\psi + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-1}\psi\, d\psi$$

$$\int \sin^2\psi\, d\psi = -\tfrac{1}{2}\sin\psi\cos\psi + \tfrac{1}{2}\psi,$$

$$\int \sin^4\psi\, d\psi = -\tfrac{1}{4}\sin^3\psi\cos\psi - \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{3}{4}\sin\psi\cos\psi + \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{3}{4}\,\psi,$$

$$\int \sin^6\psi\, d\psi = -\tfrac{1}{6}\sin^5\psi\cos\psi - \tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{5}{6}\sin^3\psi\cos\psi - \tfrac{1}{2}\,\tfrac{3}{4}\cdot\tfrac{5}{6}\sin\psi\cos\psi + \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{3}{4}\cdot\tfrac{5}{6}\,\psi.$$

Nimmt man die Integrale von $\psi_2 = 0$ bis $\psi_1 = \frac{\pi}{2}$, d. h. von $\vartheta = 0$ bis $\vartheta = \frac{\pi}{4}$, so ist

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\psi\, d\psi = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2},\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4\psi\, d\psi = \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{\pi}{2},\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6\psi\, d\psi = \frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{\pi}{2} \text{ u. s. w.},$$

und man erhält für die Länge dieses Kurvenzweiges, den man als einen Oktanten der Kurve bezeichnen kann,

$$s = \frac{a\pi}{2}\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2\frac{3}{4} - \frac{1}{3}\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2\left(\frac{3}{4}\right)^2 - \frac{1}{5}\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2\left(\frac{3}{4}\right)^3 - \ldots - \frac{1}{2n-1}\left(\frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots.2n}\right)^2\left(\frac{3}{4}\right)^n - \ldots\right].$$

Er entspricht dem Kreisoktanten $\frac{a\pi}{4}$.

§ 6.
Gegenkurve der Ellipse.

Fig. 7. Die Mittelpunktsgleichung der Ellipse für rechtwinklige Koordinaten ist, wenn a und b die große und die kleine Halbachse bedeuten: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Verbindet man dieselbe mit den Transformationsgleichungen $x = \xi\,\frac{\xi^2 + \eta^2}{\xi^2 - \eta^2}$, $y = -\eta\,\frac{\xi^2 + \eta^2}{\xi^2 - \eta^2}$, so ergiebt sich als Gleichung der Gegenkurve der Ellipse: $(b^2\xi^2 + a^2\eta^2)(\xi^2 + \eta^2)^2 = a^2b^2(\xi^2 - \eta^2)^2$. Nun wird die Grundkurve durch einen bestimmten Strahl $y - \lambda x = 0$ in den Punkten: $x' = \pm\frac{ab}{\sqrt{b^2 + a^2\lambda^2}}$ oder $\frac{b}{a} = k$ gesetzt, $x' = \pm\frac{ak}{\sqrt{k^2 + \lambda^2}}$, $y' = \lambda x'$ geschnitten, folglich ist die Gleichung der

Verbindungslinie zweier entsprechender Punkte: $\eta - \frac{1}{\lambda}\xi \pm \frac{ak(1-\lambda^2)}{\lambda\sqrt{k^2+\lambda^2}} = 0$ und die Gleichung der Verbindungslinie des mit jenem Paare zusammengehörigen Paares: $\eta + \frac{1}{\lambda}\xi \mp \frac{ak(1-\lambda^2)}{\lambda\sqrt{k^2+\lambda^2}} = 0$. Die auf den Achsen liegenden Schnittpunkte dieser Verbindungslinien haben vom Koordinatenanfang die gleichen Abstände $\xi_0 = \pm\frac{ak(1-\lambda^2)}{\sqrt{k^2+\lambda^2}}$ und $\eta_0 = \mp\frac{ak(1-\lambda^2)}{\lambda\sqrt{k^2+\lambda^2}}$. Der Flächeninhalt des durch diese Verbindungslinien entstehenden Parallelogramms ist gleich $\frac{2a^2k^2(1-\lambda^2)^2}{\lambda(k^2+\lambda^2)}$. Derselbe wird dem Inhalt der Ellipse gleich unter der Bedingung $\frac{2k(1-\lambda^2)^2}{\lambda(k^2+\lambda^2)} = \pi$ oder

$$2k\lambda^4 - \pi\lambda^3 - 4k\lambda^2 - k^2\pi\lambda + 2k = 0 \text{ oder } \lambda^2 + \frac{1}{\lambda^2} - \frac{\pi}{2}\left(\frac{\lambda}{k} + \frac{k}{\lambda}\right) - 2 = 0.$$

Eine analoge Bedingungsgleichung würde sich ergeben, wenn man die Fläche des Parallelogramms der Fläche der Gegenkurve gleich setzte.

In Polarkoordinaten ergiebt sich vermittelst der Transformationsgleichungen $x = \frac{\varrho\cos\vartheta}{\cos 2\vartheta}$, $y = -\frac{\varrho\sin\vartheta}{\cos 2\vartheta}$ als Gleichung der Gegenkurve der Ellipse: $\varrho = \frac{ab\cos 2\vartheta}{\sqrt{a^2\sin^2\vartheta + b^2\cos^2\vartheta}}$. Man ersieht wieder wie oben, daß die Kurve viermal durch den Mittelpunkt der Ellipse hindurchgeht und daß sie, da für gleiche positive und negative Werte von ϑ der Radius vector derselbe bleibt, aus zweimal zwei gleichen zu den Achsen symmetrisch liegenden Blättern besteht. Wird wieder $\frac{b}{a} = k$ und $1 - k^2 = k'^2$ gesetzt, so folgt: $\varrho = \frac{ak\cos 2\vartheta}{\sqrt{1 - k'^2\cos^2\vartheta}}$ und $\frac{d\varrho}{d\vartheta} = -\frac{ak\sin 2\vartheta\,(3 + k^2 - 2k'^2\cos^2\vartheta)}{2(1 - k'^2\cos^2\vartheta)^{\frac{3}{2}}}$. Man beachte zunächst, daß für $3 + k^2 - 2k'^2\cos^2\vartheta = 0$ weder ein Maximum noch ein Minimum der Funktion eintreten kann, da in diesem Falle $\varrho = \frac{2ak\sqrt{2}(1+k^2)}{(1-k^2)\sqrt{-1-k^2}}$ oder $= \frac{2ab\sqrt{2}(a^2+b^2)}{(a^2-b^2)\sqrt{-a^2-b^2}}$, also imaginär sein würde. Setzt man noch zur Abkürzung $1 - k'^2\cos^2\vartheta = u$ und $3 + k^2 - 2k'^2\cos^2\vartheta = v$, so ist $\varrho = \frac{ak\cos 2\vartheta}{u^{\frac{1}{2}}}$ und $\frac{d\varrho}{d\vartheta} = -\frac{ak\,v\sin 2\vartheta}{2u^{\frac{3}{2}}}$. Demnach

$$\operatorname{tg}(\tau - \vartheta) = \frac{\varrho\, d\vartheta}{d\varrho} = -\frac{2u}{v\operatorname{tg} 2\vartheta} \text{ oder}$$

$$\operatorname{tg}\tau = \frac{v\operatorname{tg}2\vartheta\operatorname{tg}\vartheta - 2u}{v\operatorname{tg}2\vartheta + 2u\operatorname{tg}\vartheta} = \frac{(u+v)\operatorname{tg}^2\vartheta - u}{\operatorname{tg}\vartheta\,(u + v - u\operatorname{tg}^2\vartheta)}.$$

Aus dieser Gleichung ergeben sich die zusammengehörigen Werte: $\vartheta = 0$, $\tau = \frac{\pi}{2}$; $\vartheta = \frac{\pi}{2}$, $\tau = 0$; $\vartheta = \pi$, $\tau = \frac{\pi}{2}$; $\vartheta = \frac{3}{2}\pi$, $\tau = 0$; ferner: $\vartheta = \frac{\pi}{4}$, $\tau = \frac{\pi}{4}$; $\vartheta = \frac{3}{4}\pi$, $\tau = \frac{3}{4}\pi$; $\vartheta = \frac{5}{4}\pi$, $\tau = \frac{5}{4}\pi$; $\vartheta = \frac{7}{4}\pi$, $\tau = \frac{7}{4}\pi$. Also gelten die oben für die Gegenkurve des Kreises rücksichtlich der Tangenten angegebenen Eigenschaften in gleicher Weise für die Gegenkurve der Ellipse. Außerdem wird $\operatorname{tg}\tau = 0$, d. h. die Tangente parallel der Abscissenachse, wenn

$\operatorname{tg}^2\vartheta = \frac{u}{u+v}$ oder, da $\cos^2\vartheta = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\vartheta}$, wenn $\operatorname{tg}^4\vartheta + \frac{4k^2}{4+k^2}\operatorname{tg}^2\vartheta - \frac{k^2}{4+k^2} = 0$, also $\operatorname{tg}\vartheta$ oder $\lambda = \pm\sqrt{\frac{k\sqrt{5k^2+4} - 2k^2}{4+k^2}} = \pm\sqrt{\frac{(\sqrt{4a^2+5b^2} - 2b)\,b}{4a^2+b^2}}$ ist. Die beiden konjugierten Strahlen schneiden die Ellipse in den Punkten:

$$x = \pm a\sqrt{\frac{(4a^2+b^2)\,b}{2a^2b + b^3 + a^2\sqrt{4a^2+5b^2}}},\quad y = \pm ab\sqrt{\frac{\sqrt{4a^2+5b^2} - 2b}{2a^2b + b^3 + a^2\sqrt{4a^2+5b^2}}},$$

und es gehören ihnen zu die Werte:

$$\varrho = \frac{a\,(4a^2 + 3b^2 - b\sqrt{4a^2+5b^2})\sqrt{b}}{\sqrt{(4a^2 - b^2 + b\sqrt{4a^2+5b^2})\,(2a^2b + b^3 + a^2\sqrt{4a^2+5b^2})}},$$

$$r = a\sqrt{\frac{(4a^2 - b^2 + b\sqrt{4a^2+5b^2})\,b}{2a^2b + b^3 + a^2\sqrt{4a^2+5b^2}}}, \text{ so daß}$$

$$\varrho : r = (4a^2 + 3b^2 - b\sqrt{4a^2+5b^2}) : (4a^2 - b^2 + b\sqrt{4a^2+5b^2}).$$

Ebenso wird $\operatorname{tg}\tau = \infty$, d. h. die Tangente parallel der Ordinatenachse, wenn $\operatorname{tg}^2\vartheta = \frac{u+v}{u}$ oder $\operatorname{tg}^4\vartheta - 4\operatorname{tg}^2\vartheta - 1 - 4k^2 = 0$, wenn also $\operatorname{tg}\vartheta$ oder $\lambda = \pm\sqrt{2 + \sqrt{5 + 4k^2}}$ $= \pm\sqrt{\frac{2a + \sqrt{5a^2+4b^2}}{a}}$ ist. Die beiden konjugierten Strahlen schneiden die Ellipse in den Punkten:

$$x = \pm\frac{ab}{\sqrt{2a^2 + b^2 + a\sqrt{5a^2+4b^2}}},\quad y = \pm\frac{b\sqrt{(2a + \sqrt{5a^2+4b^2})\,a}}{\sqrt{2a^2 + b^2 + a\sqrt{5a^2+4b^2}}},$$

und es gehören ihnen zu die Werte:

$$\varrho = \frac{b\,(a + \sqrt{5a^2+4b^2})\sqrt{a}}{\sqrt{(3a + \sqrt{5a^2+4b^2})\,(2a^2 + b^2 + a\sqrt{5a^2+4b^2})}},$$

$$r = b\sqrt{\frac{(3a + \sqrt{5a^2+4b^2})\,a}{2a^2 + b^2 + a\sqrt{5a^2+4b^2}}}, \text{ so daß}$$

$$\varrho : r = (a + \sqrt{5a^2+4b^2}) : (3a + \sqrt{5a^2+4b^2}).$$

Um den Krümmungshalbmesser dieser Gegenkurve zu berechnen, beachten wir, daß $\frac{du}{d\vartheta} = k'^2\sin 2\vartheta$, $\frac{dv}{d\vartheta} = 2k'^2\sin 2\vartheta$ und $\frac{d^2\varrho}{d\vartheta^2} = -\frac{ak}{4}\,\frac{k'^2\sin^2 2\vartheta\,(4u - 3v) + 4uv\cos 2\vartheta}{u^{\frac{5}{2}}}$; mithin ist

$$P = \frac{ak}{2u^{\frac{3}{2}}}\cdot\frac{(4u^2\cos^2 2\vartheta + v^2\sin^2 2\vartheta)^{\frac{3}{2}}}{4u(u+v)\cos^2 2\vartheta + 2v^2\sin^2 2\vartheta + k'^2(4u - 3v)\cos 2\vartheta\sin^2 2\vartheta}.$$

Für $\vartheta = 0$ und $\vartheta = \pi$, also in den Punkten, wo die Kurve die Abscissenachse schneidet, wird $u = 1 - k'^2 = k^2$ und $v = 1 + 3k^2$, mithin $P = \frac{ak^2}{1+4k^2} = \frac{ab^2}{a^2+4b^2}$; für $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ und $\vartheta = \frac{3}{2}\pi$ aber, also in den Punkten, wo die Kurve die Ordinatenachse schneidet, wird

$u = 1$ und $v = 3 + k^2$, mithin $P = \frac{ak}{4 + k^2} = \frac{a^2 b}{4a^2 + b^2}$. Für die Ellipse sind die entsprechenden Krümmungsradien $\frac{b^2}{a}$ in den Endpunkten der großen und $\frac{a^2}{b}$ in den Endpunkten der kleinen Achse. Ist $b = a$, so folgt wieder in beiden Fällen $P = \frac{1}{5} a$.

Zur Berechnung des Flächeninhalts unserer vierblättrigen Kurve ist $\frac{1}{2}\int \varrho^2 d\vartheta = \frac{a^2 k^2}{2}\int \frac{\cos^2 2\vartheta \, d\vartheta}{1 - k'^2 \cos^2\vartheta}$. Setzt man $tg\,\vartheta = \lambda$, so ist

$$\cos^2\vartheta = \frac{1}{1+\lambda^2},\ \cos 2\vartheta = \frac{1-\lambda^2}{1+\lambda^2} \text{ und } d\vartheta = \frac{d\lambda}{1+\lambda^2}, \text{ also}$$

$$\tfrac{1}{2}\int \varrho^2 d\vartheta = \frac{a^2 k^2}{2}\int \frac{(1-\lambda^2)^2 d\lambda}{(k^2+\lambda^2)(1+\lambda^2)^2}.$$

Um den Bruch unter dem Integralzeichen in Partialbrüche zu zerlegen, sei zunächst

$$\frac{1 - 2\lambda^2 + \lambda^4}{(k^2+\lambda^2)(1+\lambda^2)^2} = \frac{A\lambda + B}{k^2+\lambda^2} + \frac{\varphi(\lambda)}{(1+\lambda^2)^2} \text{ oder}$$

$1 - 2\lambda^2 + \lambda^4 = (A\lambda + B)(1+\lambda^2)^2 + (k^2+\lambda^2)\,\varphi(\lambda)$. Setzt man $\lambda = \pm ki$ oder $k^2 + \lambda^2 = 0$ und beachtet, daß jede Gleichung durch Trennung der reellen und der imaginären Teile in zwei verschiedene Gleichungen sich zerlegen läßt, so folgt: $A = 0$, $B = \left(\frac{1+k^2}{1-k^2}\right)^2$. Setzt man weiter $\frac{1 - 2\lambda^2 + \lambda^4}{(k^2+\lambda^2)(1+\lambda^2)^2} = \frac{B}{k^2+\lambda^2} + \frac{C\lambda + D}{(1+\lambda^2)^2} + \frac{C_1\lambda + D_1}{1+\lambda^2}$, wo B bekannt und C_1 notwendig gleich Null sein muß, so findet man, indem man die entsprechenden Koeffizienten beider Seiten einander gleich setzt: $C = 0$, $D_1 = -\frac{4k^2}{(1-k^2)^2}$ und $D = -\frac{4}{1-k^2}$. Folglich:

$$\frac{(1-\lambda^2)^2}{(k^2+\lambda^2)(1+\lambda^2)^2} = \frac{\left(\frac{1+k^2}{1-k^2}\right)^2}{k^2+\lambda^2} - \frac{\frac{4}{1-k^2}}{(1+\lambda^2)^2} - \frac{\frac{4k^2}{(1-k^2)^2}}{1+\lambda^2}.$$

Nun ist $\int \frac{d\lambda}{k^2+\lambda^2} = \frac{1}{k}\,arc\,tg\,\frac{\lambda}{k}$,

$$\int \frac{d\lambda}{(1+\lambda^2)^2} = \int \frac{d\lambda}{1+\lambda^2} - \int \frac{\lambda^2 d\lambda}{(1+\lambda^2)^2} = \int \frac{d\lambda}{1+\lambda^2} + \tfrac{1}{2}\int \lambda . d\frac{1}{1+\lambda^2} = \tfrac{1}{2}\int \frac{d\lambda}{1+\lambda^2} + \tfrac{1}{2}\frac{\lambda}{1+\lambda^2}$$

und $\int \frac{d\lambda}{1+\lambda^2} = \text{arc tg}\,\lambda = \vartheta$. Mithin:

$$\tfrac{1}{2}\int \varrho^2 d\vartheta = \frac{a^2 k^2}{2}\left[\left(\frac{1+k^2}{1-k^2}\right)^2 \frac{1}{k}\,\text{arc tg}\,\frac{\lambda}{k} - \frac{2}{1-k^2}\,\frac{\lambda}{1+\lambda^2} - \frac{2(1+k^2)}{(1-k^2)^2}\,\vartheta\right] + \text{Const.}$$

$$= \frac{a^2 b^2}{2(a^2-b^2)^2}\left[\frac{(a^2+b^2)^2}{ab}\,\text{arc}\left(\text{tg} = \frac{a}{b}\,\text{tg}\,\vartheta\right) - (a^2-b^2)\sin 2\vartheta - 2(a^2+b^2)\,\vartheta\right] + \text{Const.}$$

Daher ist das große Blatt oder

$$\tfrac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \varrho^2 d\vartheta = \tfrac{1}{2}\int_{\frac{3}{4}\pi}^{\frac{5}{4}\pi} \varrho^2 d\vartheta = \frac{a^2 b^2}{(a^2-b^2)^2}\left[\frac{(a^2+b^2)^2}{ab}\,\text{arc tg}\,\frac{a}{b} - (a^2-b^2) - (a^2+b^2)\,\frac{\pi}{2}\right]$$

und das kleine Blatt oder

$$\tfrac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} \varrho^2 d\vartheta = \tfrac{1}{2}\int_{\frac{5}{4}\pi}^{\frac{7}{4}\pi} \varrho^2 d\vartheta = \frac{a^2 b^2}{(a^2-b^2)^2}\left[\frac{(a^2+b^2)^2}{ab}\left(\frac{\pi}{2} - \text{arc tg}\,\frac{a}{b}\right) + a^2 - b^2 - (a^2+b^2)\,\frac{\pi}{2}\right]$$

$$= \frac{a^2 b^2}{(a^2-b^2)^2}\left[\frac{(a^2+b^2)^2}{ab}\,\text{arc tg}\,\frac{b}{a} + a^2 - b^2 - (a^2+b^2)\,\frac{\pi}{2}\right],$$

folglich die Gesamtfläche der Gegenkurve gleich

$$\frac{a^2 b^2}{(a^2-b^2)^2}\left(\frac{(a^2+b^2)^2}{ab}\,\pi - 2(a^2+b^2)\,\pi\right) = \frac{a^2+b^2}{(a+b)^2}\,ab\pi.$$

Daß das erste Blatt immer größer ist als das zweite, lässt sich leicht beweisen; man hat nur zu zeigen, daß $\frac{(a^2+b^2)^2}{ab}\left(\text{arc tg}\,\frac{a}{b} - \text{arc tg}\,\frac{b}{a}\right) - 2(a^2-b^2)$ positiv oder daß

$$\text{arc tg}\,\tfrac{1}{2}\left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a}\right) > \frac{2ab(a^2-b^2)}{(a^2+b^2)^2} \text{ ist.}$$

Es ist aber $\text{arc tg}\,z = \frac{z}{1+z^2}\left[1 + \frac{2}{3}\,\frac{z^2}{1+z^2} + \frac{2.4}{3.5}\left(\frac{z^2}{1+z^2}\right)^2 + \ldots\right]$,

$$\text{also arc tg}\,z > \frac{z}{1+z^2}, \text{ folglich arc tg}\,\frac{a^2-b^2}{2ab} > \frac{2ab(a^2-b^2)}{(a^2+b^2)^2}.$$

Will man wieder die Flächen der Gegenkurve mit den entsprechenden Flächen der Grundkurve vergleichen, so ist für letztere $r^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi} = \frac{a^2 k^2}{1 - k'^2\cos^2\varphi}$, folglich, wenn man $\text{tg}\,\varphi = \lambda$ setzt,

$$\tfrac{1}{2}\int r^2 d\varphi = \frac{a^2 k^2}{2}\int \frac{d\lambda}{k^2+\lambda^2} = \frac{a^2 k}{2}\,\text{arc tg}\,\frac{\lambda}{k} + \text{Const.} = \frac{ab}{2}\,\text{arc}\left(\text{tg} = \frac{a}{b}\,\text{tg}\,\varphi\right) + \text{Const.},$$

mithin der Reihe nach:

$$\tfrac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} r^2 d\varphi = \tfrac{1}{2}\int_{\frac{3}{4}\pi}^{\frac{5}{4}\pi} r^2 d\varphi = ab\,\text{arc tg}\,\frac{a}{b},$$

$$\tfrac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} r^2 d\varphi = \tfrac{1}{2}\int_{\frac{5}{4}\pi}^{\frac{7}{4}\pi} r^2 d\varphi = ab\left(\frac{\pi}{2} - \text{arc tg}\,\frac{a}{b}\right) = ab\,\text{arc tg}\,\frac{b}{a}$$

und die Gesamtfläche der Ellipse wie bekannt gleich $ab\pi$. Daher verhält sich die Fläche der Gegenkurve zu der der Grundkurve im vorliegenden Falle wie $a^2 + b^2$ zu $(a+b)^2$.

§ 7.

Gegenkurve der Hyperbel.

Die Mittelpunktsgleichung der Hyperbel für rechtwinklige Koordinaten ist, wenn die beiden Halbachsen mit a und b bezeichnet werden, $a^2 y^2 - b^2 x^2 = -a^2 b^2$. Setzt man in diese Gleichung die Werte ein: $x = \frac{\varrho\cos\vartheta}{\cos 2\vartheta}$, $y = -\frac{\varrho\sin\vartheta}{\cos 2\vartheta}$, so folgt als Gleichung der

Gegenkurve der Hyperbel in Polarkoordinaten: $\varrho = \dfrac{ab\cos 2\vartheta}{\sqrt{b^2\cos^2\vartheta - a^2\sin^2\vartheta}}$. In rechtwinkligen Parallelkoordinaten ergiebt sich für dieselbe Kurve vermittelst der Relationen $x = \xi\,\dfrac{\xi^2+\eta^2}{\xi^2-\eta^2}$, $y = -\eta\,\dfrac{\xi^2+\eta^2}{\xi^2-\eta^2}$ die Gleichung: $(b^2\xi^2 - a^2\eta^2)(\xi^2+\eta^2)^2 = a^2b^2(\xi^2-\eta^2)^2$. Die Werte von ϱ sind nur so lange reell als $\operatorname{tg}\vartheta < \pm\dfrac{b}{a}$; für $\operatorname{tg}\vartheta > \pm\dfrac{b}{a}$ werden sie imaginär, d. h. die Kurve liegt wie die Hyperbel selbst nur innerhalb der Asymptoten der Hyperbel. Die letzteren, dargestellt durch die Gleichung $b^2\xi^2 - a^2\eta^2 = 0$, sind zugleich Asymptoten der Gegenkurve, wie sich aus der zweiten Gleichung derselben unmittelbar ergiebt. Im übrigen wird die Gestalt der Kurve wesentlich abhängen von dem Verhältnis der Konstanten a und b. Ist $b \geqq a$, so wird $\varrho = 0$ für $\vartheta = \pm\dfrac{\pi}{4}$ und $\vartheta = \pm\frac{3}{4}\pi$, ist $b < a$, so wird ϱ für diese Werte von ϑ imaginär. Für $b \geqq a$ enthält daher die Gegenkurve zwei Blätter, welche sich um die Abscissenachse legen, und dieselben werden von den Involutionsachsen im Koordinatenanfang berührt. Für $b < a$ (Fig. 8) entstehen keine Blätter, dagegen gehört in diesem Falle zu der Kurve noch der Koordinatenanfang als ein isolierter und zwar als ein vierfacher Punkt, wie sich leicht ergiebt, wenn man in die zweite Gleichung der Gegenkurve $\eta = \lambda\xi$ einsetzt. Um die verschiedenen Fälle genauer zu charakterisieren, suchen wir die Maximal- oder Minimalwerte von ϱ. Setzt man $\dfrac{b}{a} = k$ und $1 + k^2 = k'^2$, so ist $\varrho = \dfrac{ak\cos 2\vartheta}{\sqrt{k'^2\cos^2\vartheta - 1}} = \dfrac{ak\cos 2\vartheta}{u^{\frac12}}$, wenn $u = k'^2\cos^2\vartheta - 1$, folglich $\dfrac{d\varrho}{d\vartheta} = \dfrac{ak}{2}\sin 2\vartheta\,\dfrac{k'^2\cos 2\vartheta - 4u}{u} = \dfrac{ak\,v\sin 2\vartheta}{2u^{\frac32}}$, wenn $v = 3 - k^2 - 2k'^2\cos^2\vartheta$; ferner ist, da $\dfrac{du}{d\vartheta} = -k'^2\sin 2\vartheta$ und $\dfrac{dv}{d\vartheta} = 2k'^2\sin 2\vartheta$,

$$\frac{d^2\varrho}{d\vartheta^2} = \frac{ak}{4}\cdot\frac{(4u^{\frac12}\cos 2\vartheta + 3k'^2\sin^2 2\vartheta)\,v + 4k'^2u^{\frac12}\sin^2 2\vartheta}{u^2}.$$

Nun wird $\dfrac{d\varrho}{d\vartheta} = 0$ erstens, wenn $\vartheta = 0$ oder $= \pi$ und zweitens, wenn $v = 0$ ist. Im ersten Falle ist $u = k^2$, $v = 1 - 3k^2$, also $\dfrac{d^2\varrho}{d\vartheta^2} = a\,\dfrac{1-3k^2}{k^2} = a\,\dfrac{a^2-3b^2}{b^2}$; mithin wird ϱ für $\vartheta = 0$ oder $= \pi$ ein Minimum, wenn $b^2 < \dfrac{a^2}{3}$, sonst ein Maximum. Im zweiten Falle, wenn $v = 0$ oder $\cos^2\vartheta = \dfrac{3-k^2}{2(1+k^2)}$ oder $\operatorname{tg}^2\vartheta = \dfrac{3k^2-1}{3-k^2} = \dfrac{3b^2-a^2}{3a^2-b^2}$ ist, wird $u = \dfrac{1-k^2}{2}$ und

$$\frac{d^2\varrho}{d\vartheta^2} = \frac{2ak\sqrt{2}\sqrt{1-k^2}\,(3-k^2)(3k^2-1)}{(1+k^2)(1-k^2)^2} = \frac{2ab\sqrt{2}\sqrt{a^2-b^2}\,(3a^2-b^2)(3b^2-a^2)}{(a^2+b^2)(a^2-b^2)^2}.$$

In diesem Falle ist $\varrho = \dfrac{2ak\sqrt{2}\sqrt{1-k^2}}{1+k^2} = \dfrac{2ab\sqrt{2}\sqrt{a^2-b^2}}{a^2+b^2}$, also nur so lange reell als $a^2 > b^2$ ist. Wenn daher $b^2 > a^2$, so kann ein Maximal- oder Minimalwert von ϱ für $\operatorname{tg}\vartheta$ oder $\lambda = \pm\sqrt{\dfrac{3b^2-a^2}{3a^2-b^2}}$ überhaupt nicht eintreten, wie auch aus dem zweiten Differential-

quotienten ersichtlich ist; für $b^2 = a^2$ wird $\varrho = 0$. Ist $b^2 < \dfrac{a^2}{3}$, so wird λ ebenfalls imaginär; ist dagegen $\dfrac{a^2}{3} < b^2 < a^2$ (Fig. 8), so ist λ reell und ϱ wird, wie der zweite Differentialquotient zeigt, ein Minimum. Die beiden konjugierten Strahlen schneiden alsdann die Hyperbel in den Punkten: $x = \pm ab\sqrt{\dfrac{3a^2-b^2}{a^4-b^4}}$, $y = \pm ab\sqrt{\dfrac{3b^2-a^2}{a^4-b^4}}$, und es gehören ihnen zu die Werte: $\varrho = \dfrac{2ab\sqrt{2}\sqrt{a^2-b^2}}{a^2+b^2}$, $r = \dfrac{ab\sqrt{2}}{\sqrt{a^2-b^2}}$, so daß $\varrho : r = 2(a^2-b^2) : (a^2+b^2)$.

Will man die Fläche der Gegenkurve berechnen, so ist

$\frac12\int\varrho^2\,d\vartheta = \dfrac{a^2k^2}{2}\displaystyle\int\frac{\cos^2 2\vartheta\,d\vartheta}{k'^2\cos^2\vartheta - 1}$ oder $\operatorname{tg}\vartheta = \lambda$ gesetzt,

$\frac12\int\varrho^2\,d\vartheta = \dfrac{a^2k^2}{2}\displaystyle\int\frac{(1-\lambda^2)\,d\lambda}{(k^2-\lambda^2)(1+\lambda^2)^2}$. Nach der Methode der unbestimmten Koeffizienten findet man: $\dfrac{1-2\lambda^2+\lambda^4}{(k^2-\lambda^2)(1+\lambda^2)^2} = \dfrac{\left(\frac{1-k^2}{1+k^2}\right)^2}{k^2-\lambda^2} + \dfrac{\frac{4}{1+k^2}}{(1+\lambda^2)^2} - \dfrac{\frac{4k^2}{(1+k^2)^2}}{1+\lambda^2}$. Folglich ist

$$\tfrac12\int\varrho^2\,d\vartheta = \frac{a^2k^2}{2}\left[\left(\frac{1-k^2}{1+k^2}\right)^2\frac{1}{2k}\,l\,\frac{k+\lambda}{k-\lambda} + \frac{2}{1+k^2}\left(\frac{\lambda}{1+\lambda^2} + \frac{1-k^2}{1+k^2}\operatorname{arc\,tg}\lambda\right)\right] + \text{Const.}$$
$$= \frac{a^2b^2}{2(a^2+b^2)^2}\left[\frac{(a^2-b^2)^2}{2ab}\,l\,\frac{b+a\operatorname{tg}\vartheta}{b-a\operatorname{tg}\vartheta} + (a^2+b^2)\sin 2\vartheta + 2(a^2-b^2)\,\vartheta\right] + \text{Const.}$$

Wird der Sektor von $\vartheta = 0$ an gerechnet, so fällt die Konstante fort. Für $\vartheta = \operatorname{arc\,tg}\dfrac{b}{a}$ wird wie bei der Hyperbel, für welche $\frac12\displaystyle\int_0^{\varphi} r^2\,d\varphi = \frac14\,ab\,l\,\frac{b+a\operatorname{tg}\varphi}{b-a\operatorname{tg}\varphi}$, die Fläche der Gegenkurve unendlich groß. Nimmt man das Integral zwischen den Grenzen $\vartheta = 0$ und $\vartheta = \dfrac{\pi}{4}$, so findet man, daß die Hälfte eines Blattes $= \dfrac{a^2b^2}{2(a^2+b^2)^2}\left[\dfrac{(a^2-b^2)^2}{2ab}\,l\,\dfrac{b+a}{b-a} + a^2 + b^2 + (a^2-b^2)\dfrac{\pi}{2}\right]$, folglich die Summe der beiden Blätter $= \dfrac{2a^2b^2}{(a^2+b^2)^2}\left[\dfrac{(a^2-b^2)^2}{2ab}\,l\,\dfrac{b+a}{b-a} + a^2 + b^2 + (a^2-b^2)\dfrac{\pi}{2}\right]$ ist. Diese Ausdrücke werden jedoch, wie es sein muß, für $b < a$ imaginär.

Ist $b = a$ (Fig. 9), so heißt die Hyperbel gleichseitig und ihre Gleichung wird $x^2 - y^2 = a^2$. Die Gleichung der Gegenkurve geht alsdann über in $(\varrho^2 - a^2\cos 2\vartheta)\cos 2\vartheta = 0$ oder

$$(\xi^2-\eta^2)\,[(\xi^2+\eta^2)^2 - a^2(\xi^2-\eta^2)] = 0.$$

Sie stellt die Lemniskate dar in Verbindung mit den beiden Hyperbelasymptoten oder Involutionsachsen. Die Lemniskate in Verbindung mit den Involutionsachsen ist daher die Gegenkurve der gleichseitigen Hyperbel für den Fall, daß die Koordinatenachsen mit den Hyperbelachsen zusammenfallen. Jeder Punkt der Involutionsachsen entspricht den unendlich entfernten Punkten der Grundkurve. Nun wird die gleichseitige Hyperbel durch einen bestimmten Strahl $y - \lambda x = 0$ in den Punkten $x' = \pm\dfrac{a}{\sqrt{1-\lambda^2}}$, $y' = \lambda x'$ geschnitten; daher haben nach § 3 die auf den Achsen liegenden Schnittpunkte der Verbindungslinien entsprechender zusammengehöriger Punkte vom Koordinatenanfang die gleichen Abstände $\xi_0 = \pm a\sqrt{1-\lambda^2}$ und $\eta_0 = \mp \frac{a\sqrt{1-\lambda^2}}{\lambda}$. Der Flächeninhalt des durch diese Verbindungslinien begrenzten Parallelogramms ist gleich $\frac{2a^2(1-\lambda^2)}{\lambda}$. Derselbe wird gleich der Fläche der Gegenkurve oder gleich a^2 (siehe unten), wenn $2\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$ oder $\lambda = -\frac{1}{4} \pm \frac{1}{4}\sqrt{17}$. Diese Werte von λ sind konstruierbar. Die Linie selbst, welche zwei entsprechende Punkte verbindet, hat nach § 3 die Gleichung: $\eta - \frac{1}{\lambda}\xi \pm \frac{a\sqrt{1-\lambda^2}}{\lambda} = 0$. Setzt man in derselben $\frac{y'}{x'}$ statt λ, so nimmt sie die Form an: $\xi x' - \eta y' = a^2$. Daraus folgt, daß die Verbindungslinie zweier entsprechender Punkte eine Tangente der gleichseitigen Hyperbel ist, und wir erhalten als speziellen Fall der Theorie der Gegenkurven den bekannten Satz: Fällt man von dem Mittelpunkte einer gleichseitigen Hyperbel die Lote auf die Tangenten derselben, so erhält man als Fußpunktskurve die Lemniskate. Die Lemniskate hat bekanntlich die Eigenschaft, daß das Produkt der Abstände eines Punktes derselben von zwei festen Punkten oder Polen dem Quadrat der halben Entfernung dieser Pole gleich ist. Die beiden Pole liegen hier auf der Hauptachse der Hyperbel in dem Abstand $a\sqrt{\frac{1}{2}}$ vom Mittelpunkt, und es gehen durch einen solchen Pol diejenigen Tangenten der Hyperbel, für welche $\lambda = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}$ ist, d. h. deren Berührungspunkte die Endpunkte der Brennpunktsordinaten sind.

Aus der Gleichung der Lemniskate $\varrho = a\sqrt{\cos 2\vartheta}$ folgt:

$$\frac{d\varrho}{d\vartheta} = -\frac{a \sin 2\vartheta}{\sqrt{\cos 2\vartheta}} \text{ und } \frac{d^2\varrho}{d\vartheta^2} = -\frac{a(1+\cos^2 2\vartheta)}{(\cos 2\vartheta)^{\frac{3}{2}}}.$$

Bezeichnet wieder τ den Winkel, welchen eine Tangente der Kurve mit der positiven Abscissenachse einschließt, so ist $\operatorname{tg}(\tau - \vartheta) = \frac{\varrho\, d\vartheta}{d\varrho} = -\frac{1}{\operatorname{tg} 2\vartheta}$ oder $\operatorname{tg}\tau = \frac{3\operatorname{tg}^2\vartheta - 1}{\operatorname{tg}\vartheta(3-\operatorname{tg}^2\vartheta)}$, während man für die gleichseitige Hyperbel, deren Polargleichung $r = \frac{a}{\sqrt{\cos 2\varphi}}$ ist, auf gleiche Weise erhält: $\operatorname{tg}(\tau - \varphi) = \frac{1}{\operatorname{tg} 2\varphi}$ oder $\operatorname{tg}\tau = \frac{1}{\operatorname{tg}\varphi}$. Man erkennt aus diesen Gleichungen, daß allgemein für zwei entsprechende Punkte die Tangenten beider Kurven mit den zugehörigen Leitstrahlen gleiche Winkel bilden, daß insbesondere in den Scheitelpunkten der gleichseitigen Hyperbel die Tangenten gemeinschaftlich sind und zu der Hauptachse senkrecht stehen, daß endlich die Tangenten der Lemniskate der Hauptachse parallel werden, wenn $\operatorname{tg}\vartheta$ oder $\lambda = \pm\sqrt{\frac{1}{3}}$ oder $\vartheta = \pm 18^0\, 26',1$ ist. Diese beiden konjugierten Strahlen schneiden die Hyperbel in den Punkten: $x = \pm a\sqrt{\frac{3}{2}}$, $y = \pm a\sqrt{\frac{1}{2}}$, und es gehören ihnen zu die Werte $\varrho = a\sqrt{\frac{1}{2}}$, $r = a\sqrt{2}$, so daß $\varrho : r = 1 : 2$.

Für den Krümmungsradius der Lemniskate ergiebt sich $P = \frac{a}{3\sqrt{\cos 2\vartheta}} = \frac{a^2}{3}$, während für die gleichseitige Hyperbel $P = -\frac{a}{(\cos 2\varphi)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{r^3}{a^2}$ gefunden wird. In den Scheitelpunkten ist daher der Krümmungshalbmesser der Hyperbel gleich $-a$, der ihrer Gegenkurve gleich $\frac{a}{3}$.

Um die Lemniskate zu quadrieren, setzt man entweder in der oben für die Fläche der Gegenkurve der Hyperbel allgemein entwickelten Formel $b = a$, oder man hat direkt $\frac{a^2}{2}\int \cos 2\vartheta\, d\vartheta = \frac{a^2}{4}\sin 2\vartheta + \text{Const.}$ Werden die Sektoren von der Achse an gerechnet, so fällt die Konstante fort. Nimmt man nun das Integral von $\vartheta = 0$ bis $\vartheta = \frac{\pi}{4}$, so wird der vierte Teil der Fläche gleich $\frac{a^2}{4}$, also die ganze Fläche gleich a^2. Dagegen ist für die gleichseitige Hyperbel $\frac{a^2}{2}\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\cos 2\varphi} = \frac{a^2}{4}\, l\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \varphi\right)$. Es werde das Verhältnis des Hyperbelsektors zu dem entsprechenden Lemniskatensektor, d. h. für die gleiche Anomalie φ, mit ν bezeichnet, so ist

$$l\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \varphi\right) = \nu \sin 2\varphi \text{ oder } e^{\nu \sin 2\varphi} = \frac{1+\operatorname{tg}\varphi}{1-\operatorname{tg}\varphi}, \text{ folglich}$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{e^{\nu\sin 2\varphi} - 1}{e^{\nu \sin 2\varphi} + 1} = \frac{e^{\frac{\nu}{2}\sin 2\varphi} - e^{-\frac{\nu}{2}\sin 2\varphi}}{e^{\frac{\nu}{2}\sin 2\varphi} + e^{-\frac{\nu}{2}\sin 2\varphi}}.$$

Unter Anwendung hyperbolischer Funktionen erhält man, da $\mathfrak{Sin}\,\omega = \frac{1}{2}\left(e^{\omega} - e^{-\omega}\right)$ und $\mathfrak{Cof}\,\omega = \frac{1}{2}\left(e^{\omega} + e^{-\omega}\right)$, die einfache Relation: $\operatorname{tg}\varphi = \frac{\mathfrak{Sin}\left(\frac{\nu}{2}\sin 2\varphi\right)}{\mathfrak{Cof}\left(\frac{\nu}{2}\sin 2\varphi\right)} = \mathfrak{Tang}\left(\frac{\nu}{2}\sin 2\varphi\right)$ oder $\nu = \frac{2\,\mathfrak{Arc\,Tang}\operatorname{tg}\varphi}{\sin 2\varphi}$. Nach dieser Gleichung, deren Richtigkeit übrigens von selbst einleuchtet, kann für jeden Wert von φ die zugehörige Verhältniszahl ν leicht berechnet werden.

Will man die Lemniskate nach der Gleichung $\varrho = a\sqrt{\cos 2\vartheta}$ konstruieren,*) so schlägt man um O mit $OA = a$ den Kreis, verdoppelt den Centriwinkel $AOM = \vartheta$, so daß $AM = MN$ und fällt von N das Lot auf OA, welches den über OA als Durchmesser konstruierten Kreis in Q und OA in R schneidet, alsdann ist $OR = a\cos 2\vartheta$ und $OQ = a\sqrt{\cos 2\vartheta} = \varrho$. Wird auf OM die Strecke $OP_2 = OQ$ abgetragen, so ist P_2 der zu ϑ gehörige Kurvenpunkt. Nun ist die Länge des Lemniskatenbogens in Polarkoordinaten ausgedrückt $s = \int_0^{\vartheta}\sqrt{\varrho^2 + \left(\frac{d\varrho}{d\vartheta}\right)^2}\, d\vartheta = a\int_0^{\vartheta}\frac{d\vartheta}{\sqrt{1-2\sin^2\vartheta}}$. Bezeichnet man den Winkel AOQ, die Amplitude, mit ψ, so ist

*) Vgl. Schlömilch, Compendium der höheren Analysis, 2. Band. Braunschweig 1879: Die ellipt. Integr. VII und Handbuch der Mathematik, 2. Band. Breslau 1881: Integralrechnung § 22.

$\sin\psi = \frac{\sqrt{a^2 - \varrho^2}}{a} = \sqrt{1 - \cos 2\vartheta} = \sqrt{2}\sin\vartheta$ und $\sin\vartheta = \frac{\sin\psi}{\sqrt{2}}$. Demnach, da

$$d\vartheta = \frac{\cos\psi\, d\psi}{\sqrt{2}\sqrt{1 - \frac{1}{2}\sin^2\psi}},\quad s = \frac{a}{\sqrt{2}}\int_0^{\psi}\frac{d\psi}{\sqrt{1 - \frac{1}{2}\sin^2\psi}} = \frac{a}{\sqrt{2}}F(\psi),$$

wo $F(\psi)$ das elliptische Integral der ersten Gattung bedeutet, dessen Modul $\sqrt{\frac{1}{2}}$ ist. Entwickelt man $(1 - \frac{1}{2}\sin^2\psi)^{-\frac{1}{2}}$ in eine Reihe, so folgt:

$$s = \frac{a}{\sqrt{2}}\left[\psi + \int_0^{\psi} d\psi\left(\left(\frac{1}{2}\right)^2\sin^2\psi + \frac{1.3}{1.2}\left(\frac{1}{2}\right)^4\sin^4\psi + \frac{1.3.5}{1.2.3}\left(\frac{1}{4}\right)^6\sin^6\psi + \ldots\right)\right].$$

Sucht man nur die Länge des Lemniskatenquadranten, nimmt also die Integrale zwischen den Grenzen $\vartheta = 0$ und $\vartheta = \frac{\pi}{4}$ oder $\psi = 0$ und $\psi = \frac{\pi}{2}$, so ist wie oben (§ 5):

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\psi\, d\psi = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2},\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4\psi\, d\psi = \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{\pi}{2},\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^6\psi\, d\psi = \frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot\frac{\pi}{2} \text{ u. s. w.;}$$

folglich der Lemniskatenquadrant

$$S = \frac{a\pi}{2\sqrt{2}}\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2\frac{1}{2} + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \ldots + \left(\frac{1.3\ 5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots\ldots 2n}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^n + \ldots\right].$$

In Bezug auf die gleichseitige Hyperbel ist $r = \frac{a}{\sqrt{\cos 2\varphi}}$, $\frac{dr}{d\varphi} = a\frac{\sin 2\varphi}{(\cos 2\varphi)^{\frac{3}{2}}}$, mithin der Bogen $s = a\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{(\cos 2\varphi)^{\frac{3}{2}}}$. Setzt man wie bei der Gegenkurve $\sin\psi = \sqrt{2}\sin\varphi$, so daß ψ auf die oben angegebene Weise konstruiert werden kann, so ist $\cos 2\varphi = \cos^2\psi$ und

$$d\varphi = \frac{\cos\psi\, d\psi}{\sqrt{2}\sqrt{1 - \frac{1}{2}\sin^2\psi}},\ \text{folglich}\ s = \frac{a}{\sqrt{2}}\int_0^{\psi}\frac{d\psi}{\cos^2\psi\sqrt{1 - \frac{1}{2}\sin^2\psi}} = \frac{a}{\sqrt{2}}\int_0^{\psi}\frac{d\psi}{\cos^2\psi\,\Delta\psi}.$$

Nun ist*) $\int_0^{\psi}\frac{d\psi}{\cos^2\psi\,\Delta\psi} = \frac{1}{k'^2}\operatorname{tg}\psi\,\Delta\psi + F(\psi) - \frac{1}{k'^2}E(\psi)$, wo $F(\psi)$ das elliptische Integral der ersten, $E(\psi)$ das der zweiten Gattung bedeutet; also, da hier der Modul $k = \sqrt{\frac{1}{2}}$ und $k'^2 = 1 - k^2 = \frac{1}{2}$, $s = a\sqrt{2}\operatorname{tg}\psi\,\Delta\psi + \frac{a}{\sqrt{2}}F(\psi) - a\sqrt{2}E(\psi)$. Das erste Glied $a\sqrt{2}\operatorname{tg}\psi\,\Delta\psi$ stellt den Abstand p zweier entsprechender Punkte dar, denn derselbe ist gleich $a\sqrt{\cos 2\varphi}\operatorname{tg} 2\varphi$ und es ist $\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{\sqrt{2}\sin\psi\sqrt{1 - \frac{1}{2}\sin^2\psi}}{\cos^2\psi}$, folglich ist $p - s = a\sqrt{2}\left[E(\psi) - \frac{1}{2}F(\psi)\right]$. Nimmt man die Integrale zwischen den Grenzen $\varphi = 0$ und $\varphi = \frac{\pi}{4}$ oder $\psi = 0$ und $\psi = \frac{\pi}{2}$, so erhält man links die Differenz der Asymptote und des Hyperbelquadranten, rechts die vollständigen Integrale. Nach den in § 5 und in diesem Paragraphen bereits angeführten Entwicklungen ist:

*) Durège, Theorie der elliptischen Funktionen. Leipzig 1887. § 19.

$$E\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{5}\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^3 - \ldots\right],$$

$$F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2\frac{1}{2} + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \ldots\right];\ \text{folglich}$$

$$E\left(\frac{\pi}{2}\right) - F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{4}\left[-2\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{4}{3}\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2\frac{1}{2} - \frac{6}{5}\left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \ldots\right]$$

$$\text{und}\ \frac{1}{2}F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{4}\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2\frac{1}{2} + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \ldots\right].\ \text{Mithin}$$

$$E\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{2}F\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{4}\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^2\frac{1}{2} + \frac{1}{6}\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \ldots\right]$$

$$\text{und}\ \lim(p - s) = \frac{a\pi}{4\sqrt{2}}\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \ldots + \frac{1}{n+1}\left(\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots.2n}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^n + \ldots\right].$$

Nach dem Additionstheorem der elliptischen Integrale erster Gattung läßt sich die Summe zweier solcher Integrale von gleichem Modul und verschiedenen Amplituden in ein einziges Integral derselben Art verwandeln; sind daher zwei Lemniskatenbogen durch ihre Amplituden bestimmt, so läßt sich die Amplitude desjenigen dritten Bogens finden, welcher gleich der Summe der beiden gegebenen ist. Es ist nämlich $F(k,\varphi) + F(k,\psi) = F(k,\sigma)$, wenn $\sin\sigma = \frac{\sin\varphi\cos\psi\,\Delta\psi + \sin\psi\cos\varphi\,\Delta\varphi}{1 - k^2\sin^2\varphi\sin^2\psi}$ oder $\operatorname{tg}\sigma = \frac{\operatorname{tg}\varphi\,\Delta\psi + \operatorname{tg}\psi\,\Delta\varphi}{1 - \operatorname{tg}\varphi\operatorname{tg}\psi\,\Delta\varphi\,\Delta\psi}$ ist. Es möge darnach die Mitte des Lemniskatenquadranten gesucht werden. Dann ist zu setzen $\sigma = \frac{\pi}{2}$, $\varphi = \psi$ und $k = \sqrt{\frac{1}{2}}$; es folgt: $\operatorname{tg}\psi = \sqrt[4]{2}$ und, da $\sin\psi = \sqrt{2}\sin\vartheta$, $\operatorname{tg}\vartheta$ oder $\lambda = \pm\sqrt{\sqrt{2} - 1}$. Auf Grund dieser Gleichung läßt sich das konjugierte Strahlenpaar, welches die Lemniskatenquadranten halbiert, leicht konstruieren; dasselbe schneidet die Gegenkurve in den Punkten: $\xi = \pm a\sqrt{1 - \sqrt{\frac{1}{2}}}$, $y = \pm a\sqrt{3\sqrt{\frac{1}{2}} - 2}$ und die Grundkurve in den entsprechenden Punkten: $x = \pm a\sqrt{1 + \sqrt{\frac{1}{2}}}$, $y = \pm\frac{a}{\sqrt[4]{2}}$.

Verlegt man noch den Anfang rechtwinkliger Koordinaten in einen Scheitel der gleichseitigen Hyperbel (Fig. 10), so daß deren Gleichung übergeht in $x^2 + 2ax - y^2 = 0$, so hat die Gegenkurve die Gleichung: $(\varrho + 2a\cos\vartheta)\,\varrho\cos 2\vartheta = 0$ oder $(\xi^2 + \eta^2)(\xi^2 - \eta^2)(\xi^2 + \eta^2 + 2a\xi) = 0$; daher besteht in diesem Falle die Gegenkurve der gleichseitigen Hyperbel aus dem über der Hauptachse als Durchmesser zu konstruierenden Kreise in Verbindung mit den beiden Involutionsachsen und zwei durch den Koordinatenanfang gehenden imaginären Geraden $\eta \pm i\xi = 0$. Dieselbe Gegenkurve mit den entsprechenden Geraden resultiert, wenn man den Koordinatenanfang in den anderen Scheitel der gleichseitigen Hyperbel verlegt.

§ 8.

Gegenkurve der Parabel.

Für die Parabel wird am einfachsten die Scheitelgleichung $y^2 = 2px$ zu Grunde gelegt (Fig. 11). Vermittelst der bekannten Transformationsgleichungen ergiebt sich als Gleichung der Gegenkurve der Parabel für rechtwinklige Koordinaten:

$$[\eta^2(\xi^2+\eta^2) - 2p\xi(\xi^2-\eta^2)]\,(\xi^2+\eta^2) = 0.$$

Dieselbe besteht daher aus der Kurve $\eta^2(\xi^2+\eta^2) - 2p\xi(\xi^2-\eta^2) = 0$ und zwei durch den Koordinatenanfang gehenden imaginären Geraden $\eta \pm i\xi = 0$. Die Kurve hat auf der Seite der positiven Abscissen zwei ins Unendliche gehende Zweige, weil von den vier Wurzeln von y zwei imaginär sind, auf der Seite der negativen Abscissen aber zwei Blätter, welche sich im Koordinatenanfang schneiden und daselbst einen dreifachen Punkt bilden. Die Parabel wird durch einen bestimmten Strahl $y - \lambda x = 0$ in dem Punkte $x' = \frac{2p}{\lambda^2}$, $y' = \lambda x'$ geschnitten; folglich ist die Gleichung der Verbindungslinie zweier entsprechender Punkte: $\eta - \frac{1}{\lambda}\xi + \frac{1-\lambda^2}{\lambda^3}\,2p = 0$ oder $\lambda^3\eta - \lambda^2\xi + 2(1-\lambda^2)p = 0$ und die Gleichung der Verbindungslinie des mit jenem Paare zusammengehörigen Paares: $-\lambda^3\eta - \lambda^2\xi + 2(1-\lambda^2)p = 0$. Beide Linien schneiden sich auf der Abscissenachse in dem Abstand $\xi_0 = \frac{2(1-\lambda^2)p}{\lambda^2}$. Der Schnittpunkt fällt in den Brennpunkt der Parabel, d. h. es wird $\xi_0 = \frac{p}{2}$, wenn $\lambda = \pm\sqrt{\frac{4}{5}}$ oder wenn $x = \frac{5}{2}p$, $y = p\sqrt{5}$ ist.

In Polarkoordinaten lautet die Gleichung dieser Gegenkurve $\varrho = \frac{2p\cos\vartheta\cos 2\vartheta}{\sin^2\vartheta}$ oder $\varrho = \frac{2p\cos\vartheta}{\sin^2\vartheta} - 4p\cos\vartheta$. Mithin $\frac{d\varrho}{d\vartheta} = 2p\left(2\sin\vartheta - \frac{1+\cos^2\vartheta}{\sin^3\vartheta}\right)$ und $\frac{d^2\varrho}{d\vartheta^2} = 2p\cos\vartheta\left(\frac{5+\cos^2\vartheta}{\sin^4\vartheta} + 2\right)$. Aus $\frac{d\varrho}{d\vartheta} = 0$ folgt: $\sin^4\vartheta + \frac{1}{2}\sin^2\vartheta - 1 = 0$ oder $\sin^2\vartheta = \frac{\sqrt{17}-1}{4}$, d. h. $\vartheta = \pm 117^0\,55',1$. Substituiert man diese Werte von ϑ in das zweite Differentialverhältnis, so wird dasselbe negativ, also entsprechen sie beide einem Maximum der Funktion. Aus der Gleichung der Gegenkurve ergiebt sich als zugehöriger Wert: $\varrho = p\sqrt{\frac{71-17\sqrt{17}}{2}}$. Weil nun $\sin^2\vartheta = \frac{\sqrt{17}-1}{4}$, so ist $\operatorname{tg}^2\vartheta = \frac{\sqrt{17}+3}{2}$. Setzt man den gleichen Wert für $\operatorname{tg}^2\varphi$ in die Polargleichung der Parabel $r\sin^2\varphi = 2p\cos\varphi$ oder $r = \frac{2p\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi}}{\operatorname{tg}^2\varphi}$ ein, so erhält man den jenem Maximalwert von ϱ entsprechenden Radius vector der Parabel $r = p\sqrt{\frac{7-\sqrt{17}}{2}}$.

Zur Berechnung der Fläche dieser Gegenkurve hat man

$$\tfrac{1}{2}\int\varrho^2 d\vartheta = 2p^2\int\left(\frac{\cos^2\vartheta}{\sin^4\vartheta} - 4\cot^2\vartheta + 4\cos^2\vartheta\right)d\vartheta.$$

Es ist aber

$$\int\cos^2\vartheta\,(\sin\vartheta)^{-4}d\vartheta = -\tfrac{1}{3}\int\cos\vartheta\,d(\sin\vartheta)^{-3} = -\tfrac{1}{3}\frac{\cos\vartheta}{\sin^3\vartheta} - \tfrac{1}{3}\int\frac{d\vartheta}{\sin^2\vartheta}$$

$$= -\tfrac{1}{3}\frac{\cos\vartheta}{\sin^3\vartheta} + \tfrac{1}{3}\cot\vartheta,$$

$\int\cot^2\vartheta\,d\vartheta = -\cot\vartheta - \vartheta$ und $\int\cos^2\vartheta\,d\vartheta = \frac{\vartheta}{2} + \frac{1}{4}\sin 2\vartheta$. Folglich

$$\tfrac{1}{2}\int\varrho^2 d\vartheta = 2p^2\left(\frac{13}{3}\cot\vartheta - \tfrac{1}{3}\frac{\cos\vartheta}{\sin^3\vartheta} + \sin 2\vartheta + 6\vartheta\right) + \text{Const.}$$

$$= 2p^2\left(4\cot\vartheta - \tfrac{1}{3}\cot^3\vartheta + \sin 2\vartheta + 6\vartheta\right) + \text{Const.}$$

Daher ist die Fläche des einen Blattes oder $\frac{1}{2}\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{4}\pi}\varrho^2\,d\vartheta = 2p^2\left(\frac{3}{2}\pi - \frac{14}{3}\right)$,

ebenso die des anderen Blattes oder $\frac{1}{2}\int\limits_{-\frac{3}{4}\pi}^{-\frac{\pi}{2}}\varrho^2\,d\vartheta = 2p^2\left(\frac{3}{2}\pi - \frac{14}{3}\right)$.

Während der Radius vector der Gegenkurve das eine und das andere Blatt beschreibt, welche beide einander gleich sind, beschreibt der konjugierte Strahl die gleichen Parabelflächen:

$$\tfrac{1}{2}\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} r^2\,d\varphi = 2p^2\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2\varphi}{\sin^4\varphi}\,d\varphi = \frac{2}{3}p^2 \text{ und } \tfrac{1}{2}\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{4}} r^2\,d\varphi = \frac{2}{3}p^2.$$

Fällt der Anfang rechtwinkliger Koordinaten in den Brennpunkt der Parabel (Fig. 12), so daß die Parabelgleichung übergeht in $y^2 = p\,(p + 2x)$ oder $r = \frac{p}{1-\cos\varphi}$, so wird die Gegenkurve dargestellt durch die Gleichung: $(\xi^2+\eta^2)^3 - (p(\xi^2-\eta^2) + \xi(\xi^2+\eta^2))^2 = 0$ oder durch die Polargleichung: $\varrho = \frac{p\cos 2\vartheta}{1-\cos\vartheta} = \frac{p}{2}\left(\frac{1}{\sin^2\frac{\vartheta}{2}} - 8\cos^2\frac{\vartheta}{2}\right)$. Die Gegenkurve besteht alsdann aus drei Blättern und zwei ins Unendliche gehenden Zweigen, und sie enthält wieder im Koordinatenanfang durch das Zusammentreffen von vier Zweigen einen vierfachen Punkt. Nun ist $\frac{d\varrho}{d\vartheta} = \frac{p}{2}\left(4\sin\vartheta - \frac{\cos\frac{\vartheta}{2}}{\sin^3\frac{\vartheta}{2}}\right)$ und $\frac{d^2\varrho}{d\vartheta^2} = \frac{p}{2}\left(4\cos\vartheta + \frac{2+\cos\vartheta}{2\sin^4\frac{\vartheta}{2}}\right)$. Setzt man $\frac{d\varrho}{d\vartheta} = 0$, so folgt: $\left(8\sin^4\frac{\vartheta}{2} - 1\right)\cos\frac{\vartheta}{2} = 0$ oder $\cos\frac{\vartheta}{2} = 0$ und $8\sin^4\frac{\vartheta}{2} = 1$. Zufolge der ersten Bedingung ist $\vartheta = \pi$ oder $\varrho = \frac{p}{2}$; dieser Wert ist ein Maximum, wie man aus dem zweiten Differentialquotienten ersieht. Aus der zweiten Bedingungsgleichung folgt: $\sin^2\frac{\vartheta}{2} = \frac{1}{4}\sqrt{2}$. Daraus resultiert für ϱ ein negativer Wert $\varrho = -2p(2-\sqrt{2})$; derselbe entspricht zufolge des zweiten Differentialquotienten gleichfalls einem Maximum der Funktion.

Die Rechnung liefert für ϑ die beiden Werte $\vartheta = \pm 72^0\,58'$. Ferner ist $\operatorname{tg}^2 \frac{\vartheta}{2} = \frac{2\sqrt{2}+1}{7}$ und $\operatorname{tg} \vartheta = \sqrt{5 + 4\sqrt{2}}$, die Gleichung der Parabel aber $r = \frac{p\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi}}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi} - 1}$. Setzt man jetzt $\operatorname{tg}^2\varphi = 5 + 4\sqrt{2}$ oder $\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi} = 2 + \sqrt{2}$, so erhält man für den jenen beiden Maximalwerten von ϱ entsprechenden Radius vector der Parabel $r = p\sqrt{2}$.

Zur Quadratur der Gegenkurve wird $\frac{1}{2}\int \varrho^2 d\vartheta = \frac{p^2}{8}\int\left(\frac{1}{\sin^4\frac{\vartheta}{2}} - 16\cot^2\frac{\vartheta}{2} + 64\cos^4\frac{\vartheta}{2}\right) d\vartheta.$

Nun ist $\int \frac{d\frac{\vartheta}{2}}{\sin^4\frac{\vartheta}{2}} = \int \frac{d\frac{\vartheta}{2}}{\sin^2\frac{\vartheta}{2}} + \int \frac{\cos^2\frac{\vartheta}{2}\, d\frac{\vartheta}{2}}{\sin^4\frac{\vartheta}{2}} = -\frac{2}{3}\cot\frac{\vartheta}{2} - \frac{1}{3}\frac{\cos\frac{\vartheta}{2}}{\sin^3\frac{\vartheta}{2}}$,

$$\int \cot^2\frac{\vartheta}{2}\, d\frac{\vartheta}{2} = -\cot\frac{\vartheta}{2} - \frac{\vartheta}{2}, \quad \int \cos^4\frac{\vartheta}{2}\, d\frac{\vartheta}{2} = \frac{1}{4}\cos^3\frac{\vartheta}{2}\sin\frac{\vartheta}{2} + \frac{3}{8}\cos\frac{\vartheta}{2}\sin\frac{\vartheta}{2} + \frac{3}{8}\frac{\vartheta}{2}.$$

Demnach $\frac{1}{2}\int \varrho^2 d\vartheta = \frac{p^2}{4}\left(\frac{46}{3}\cot\frac{\vartheta}{2} - \frac{1}{3}\frac{\cos\frac{\vartheta}{2}}{\sin^3\frac{\vartheta}{2}} + 16\sin\vartheta + 2\sin 2\vartheta + 20\vartheta\right) + \text{Const.}$

Beachtet man, daß $\cos\frac{\vartheta}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\vartheta}{2}}$ und $\sin\frac{\vartheta}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\vartheta}{2}}$, also

$\cos\frac{3}{8}\pi = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$, $\sin\frac{3}{8}\pi = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$, mithin

$\cot\frac{3}{8}\pi = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}} = \sqrt{2} - 1$, $\frac{\cos\frac{3}{8}\pi}{\sin^3\frac{3}{8}\pi} = 2\,(3\sqrt{2} - 4)$ u. s. w., so folgt:

$$\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{4}\pi} \varrho^2 d\vartheta = \frac{p^2}{4}\left[\frac{46}{3}(\sqrt{2}-1) - \frac{2}{3}(3\sqrt{2}-4) + 8\sqrt{2} - 2 + 15\pi - \frac{46}{3} + \frac{2}{3} - 16 - 10\pi\right]$$
$$= \frac{p^2}{4}\left(5\pi + \frac{64}{3}\sqrt{2} - \frac{136}{3}\right),$$

$\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \varrho^2 d\vartheta = \frac{p^2}{4}\left(5\pi - \frac{64}{3}\sqrt{2} + 16\right)$, also das ganze Blatt oder $\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} \varrho^2 d\vartheta = \frac{p^2}{2}\left(5\pi - \frac{44}{3}\right)$.

Ebenso ist $\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{4}} \varrho^2 d\vartheta = \frac{p^2}{4}\left(5\pi - \frac{64}{3}\sqrt{2} + 16\right)$, $\frac{1}{2}\int_{-\frac{3}{4}\pi}^{-\frac{\pi}{2}} \varrho^2 d\vartheta = \frac{p^2}{4}\left(5\pi + \frac{64}{3}\sqrt{2} - \frac{136}{3}\right)$,

demnach auch das andere Blatt oder $\frac{1}{2}\int_{-\frac{3}{4}\pi}^{-\frac{\pi}{4}} \varrho^2 d\vartheta = \frac{p^2}{2}\left(5\pi - \frac{44}{3}\right)$; dagegen

$\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{-\frac{3}{4}\pi} \varrho^2 d\vartheta = \frac{p^2}{4}\left(5\pi - \frac{64}{3}\sqrt{2} + \frac{44}{3}\right)$, $\frac{1}{2}\int_{\frac{3}{4}\pi}^{\pi} \varrho^2 d\vartheta = \frac{p^2}{4}\left(5\pi - \frac{64}{3}\sqrt{2} + \frac{44}{3}\right)$, also das ganze

mittlere Blatt oder $\frac{1}{2}\int_{\frac{3}{4}\pi}^{-\frac{3}{4}\pi} \varrho^2 d\vartheta = \frac{p^2}{2}\left(5\pi - \frac{64}{3}\sqrt{2} + \frac{44}{3}\right)$.

Vergleicht man wieder die einzelnen Flächen der Gegenkurve der Reihe nach mit den durch den konjugierten Strahl beschriebenen Parabelflächen, so erhält man:

$\frac{1}{2}\int r^2 d\varphi = \frac{p^2}{2}\int \frac{d\varphi}{1-\cos\varphi} = \frac{p^2}{4}\int \frac{d\varphi}{\sin^2\frac{\varphi}{2}} = -\frac{p^2}{2}\cot\frac{\varphi}{2} + \text{Const.}$; demnach

$\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} r^2 d\varphi = -\frac{p^2}{2} + \frac{p^2}{2}(\sqrt{2}+1) = \frac{p^2}{2}\sqrt{2}$, $\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{4}\pi} r^2 d\varphi = \frac{p^2}{2}(2-\sqrt{2})$, also $\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi} r^2 d\varphi = p^2$.

Ebenso ist $\frac{1}{2}\int_{-\frac{3}{4}\pi}^{-\frac{\pi}{2}} r^2 d\varphi = \frac{p^2}{2}(2-\sqrt{2})$, $\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{4}} r^2 d\varphi = \frac{p^2}{2}\sqrt{2}$, also auch $\frac{1}{2}\int_{-\frac{3}{4}\pi}^{-\frac{\pi}{4}} r^2 d\varphi = p^2$;

dagegen $\frac{1}{2}\int_{\frac{3}{4}\pi}^{\pi} r^2 d\varphi = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{-\frac{3}{4}\pi} r^2 d\varphi = \frac{p^2}{2}(\sqrt{2}-1)$, also $\frac{1}{2}\int_{\frac{3}{4}\pi}^{-\frac{3}{4}\pi} r^2 d\varphi = p^2(\sqrt{2}-1)$.

Fig. 1.

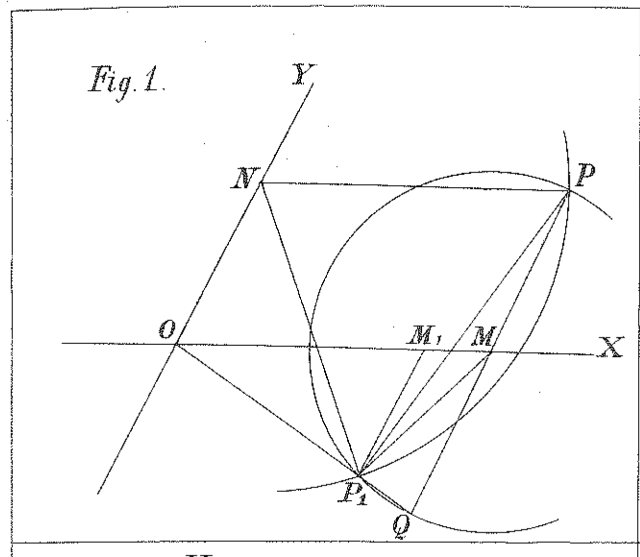


Fig. 2.

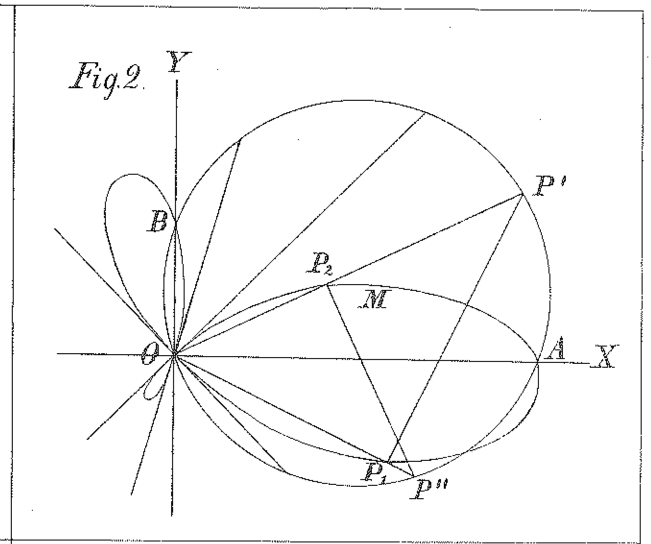


Fig. 3.

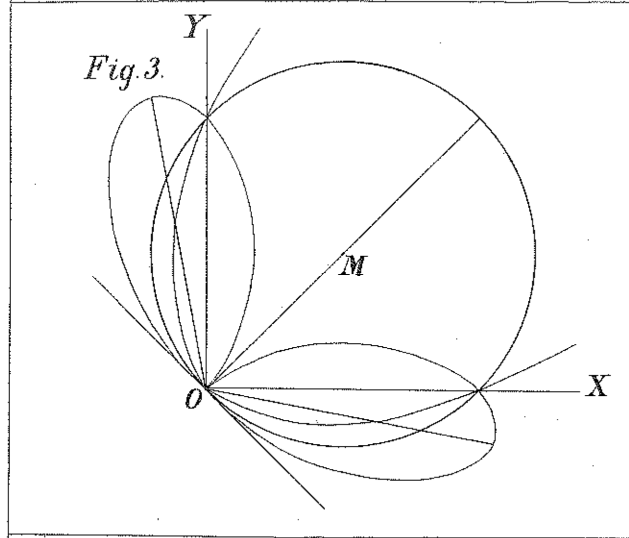


Fig. 4.

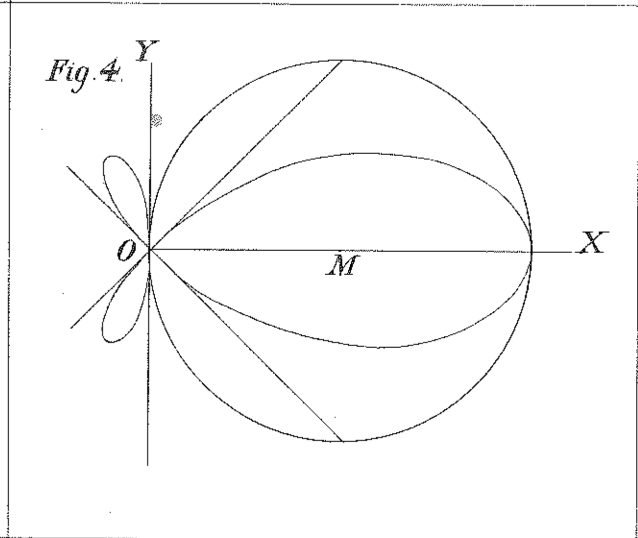


Fig. 5.

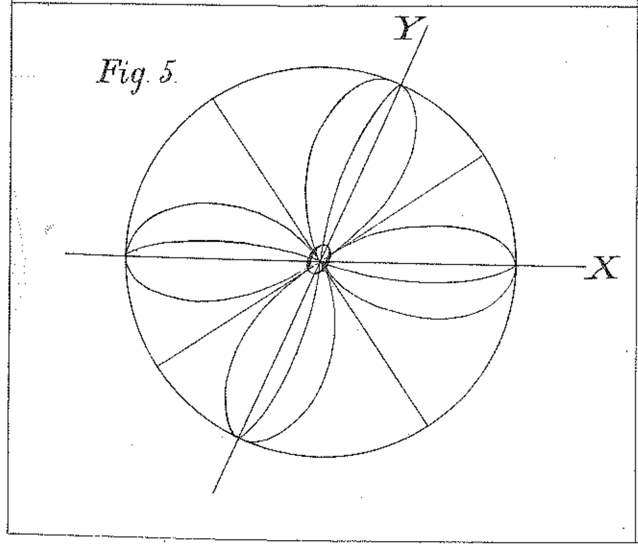


Fig. 6.

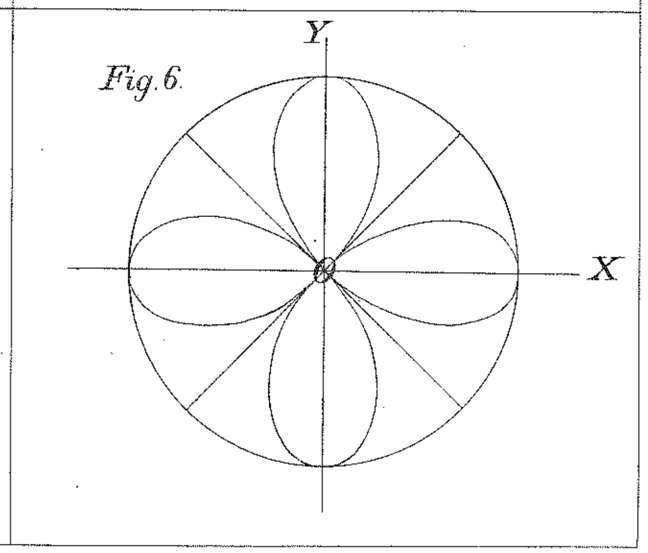


Fig. 7.

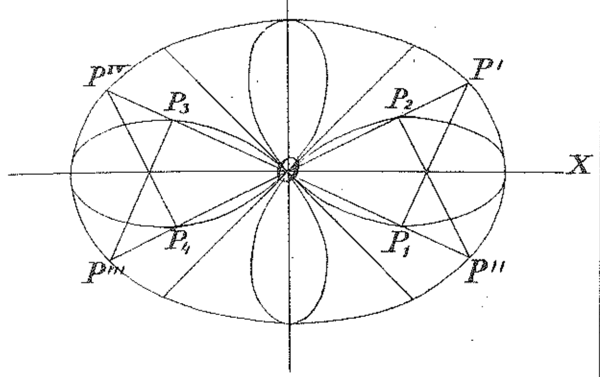


Fig. 8.

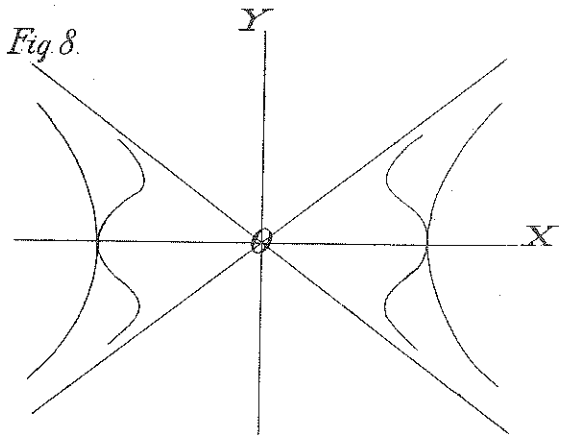


Fig. 9.

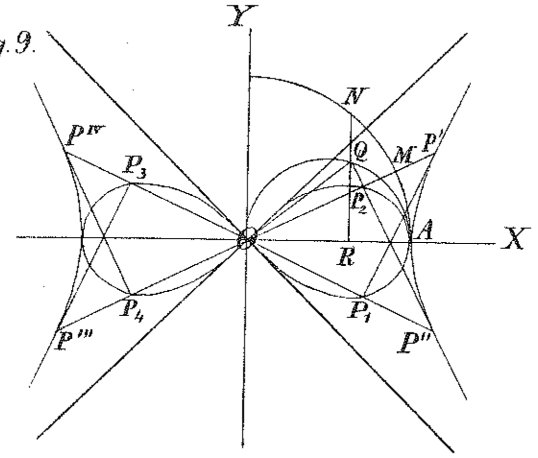


Fig. 10.

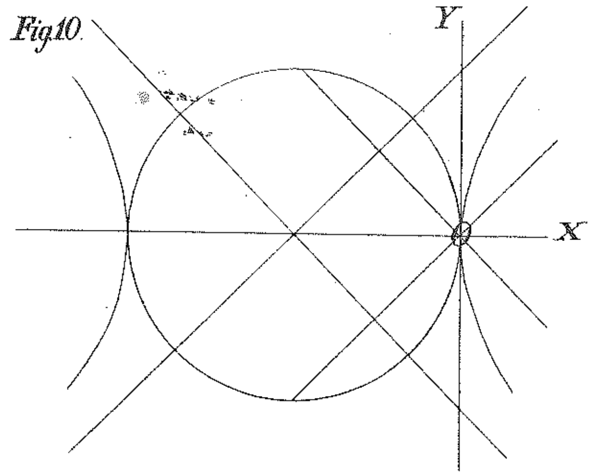


Fig. 11.

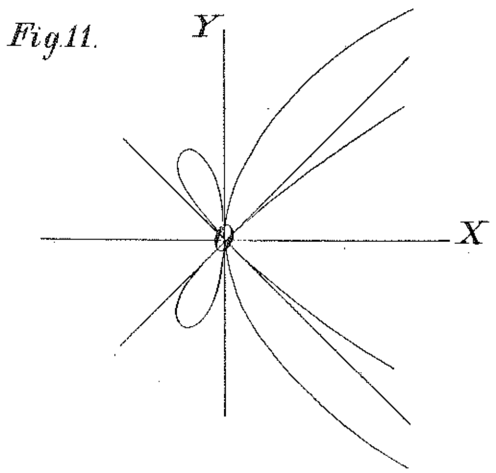
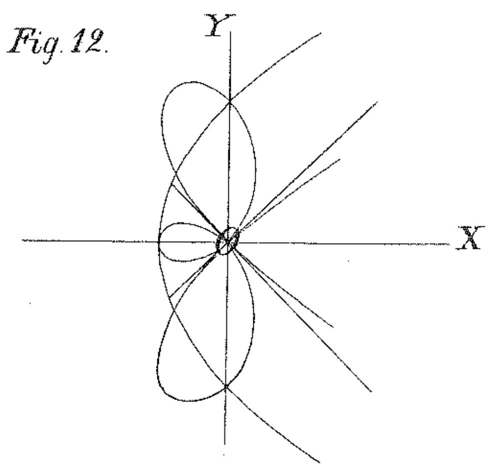


Fig. 12.



Jahresbericht.

I. Geschichtliches.

1. Oberschulbehörde. In die dem Wilhelm-Gymnasium vorgesetzte II. Sektion der Oberschulbehörde traten neu ein Herr Dr. *K. A. Schröder* jun. an Stelle des aus der Behörde ganz ausscheidenden Herrn Dr. *John Israel,* ferner Herr *J. H. Brey* an Stelle des in eine andere Sektion der Oberschulbehörde übergetretenen Herrn *E. A. O. Versmann,* schließlich der neuerwählte Direktor der Gelehrtenschule des Johanneums, Herr Prof. Dr. *Schulteß.* Nachdem in Folge des Ausscheidens des Herrn Schulrat *Harms* der bisherige Direktor der Gelehrtenschule des Johanneums, Herr Prof. Dr. *Hoche,* mit der Wahrnehmung der Geschäfte dieser Stellung durch Beschluß vom 31. März 1887 betraut worden war, wurde im vorigen Jahre von Senat und Bürgerschaft beschlossen, daß derselbe der mit der Oberleitung des höheren Schulwesens beauftragten Sektion der Oberschulbehörde als Oberbeamter beigeordnet werde, damit diese Behörde durch ihn die ihr obliegende Aufsicht über sämtliche ihr unterstellte Lehranstalten ausübe (vergl. Amtsblatt vom 7. Juli 1888).

2. Das Lehrerkollegium. Das Lehrerkollegium hat im abgelaufenen Schuljahre mancherlei Veränderungen erfahren. In die zu Ostern 1888 neu gegründete Professur wurde durch Wahl der Behörde Herr Oberlehrer Dr. *Rambeau* und in die dadurch frei gewordene Oberlehrerstelle der bisherige ordentliche Lehrer Herr Dr. *Bromig* befördert. Die durch das Ausscheiden des Herrn Dr. *Pariselle* aus dem Kollegium, worüber das vorige Programm schon berichtete, und durch das Aufrücken des Herrn Dr. *Bromig* zur Erledigung gekommenen beiden ordentlichen Lehrerstellen wurden durch die Behörde zu Ostern 1888, beziehungsweise erst zu Neujahr 1889 durch die Wahl des Herrn Dr. *Boensel* [1]) von der höheren Töchterschule zu Dessau

---

[1]) Dr. *Otto Boensel,* geboren zu Nieder-Moos im Großherzogtum Hessen am 22. Januar 1851, erhielt seine Vorbildung auf dem Gymnasium zu Büdingen, welches er zu Ostern 1870 mit dem Zeugnis der Reife verließ, um auf der Universität Giessen neuere Philologie zu studieren. Im Jahre 1875 bestand er daselbst die Prüfung für das höhere Lehramt und wurde zu gleicher Zeit an genannter Universität zum Dr. phil. promoviert. Nach einer kürzeren Lehrthätigkeit in Deutschland verlegte er im Jahre 1877 zum Zwecke weiterer Studien seinen Wohnsitz nach London und verblieb dort, einen Winteraufenthalt in Algier abgerechnet, bis zum Jahre 1882, indem er vorzugsweise an höheren englischen Schulen als Lehrer thätig war. Von Ostern 1882 bis Herbst 1884 bekleidete er eine Lehrerstelle an der Dr. Wich. Lange'schen Realschule in Hamburg, während welcher Zeit es ihm zugleich ermöglicht wurde, das pädagogische Probejahr am Wilhelm-Gymnasium abzuleisten. Von Herbst 1884 bis Ostern 1888 wirkte er als ordentlicher Lehrer an der höheren Töchterschule und dem Lehrerinnenseminar in Dessau.

und des bisherigen wissenschaftlichen Hilfslehrers Herrn *Wilhelm Dettmer* [2]) besetzt. — Ferner traten neu in das Kollegium Herr Oberlehrer Dr. *Goepel* und der Unterzeichnete, über welche Veränderungen unten berichtet wird. — In Folge einer Verfügung der Behörde vom 12. Februar werden mit Beginn des neuen Schuljahres die Herrn Dr. *Klußmann* und Dr. *Brachmann* an die Gelehrtenschule des Johanneums, von letzterer Schule hingegen die Herrn Dr. *Karl Schulte* und Dr. *Kayser* an das Wilhelm-Gymnasium versetzt werden. — Herr Prof. Dr. *Rambeau* war auf Anordnung E. H. Senates auch in diesem Jahre als Mitglied der Prüfungs-Kommission für Einjährig-Freiwillige thätig.

3. Hilfslehrer. Als Hilfslehrer war an unserer Anstalt nach dem Ausscheiden der Herren *Karl Neubert* und Dr. *Maack* aus dem Verbande der Schule seit dem 8. Oktober 1888 bis zu seiner definitiven Anstellung Herr *Wilhelm Dettmer* beschäftigt, nachdem er vorher Hilfslehrer an der Gelehrtenschule des Johanneums gewesen. Sein pädagogisches Probejahr trat Herr *Badstüber* gleichfalls am 8. Oktober an, um dasselbe auf Beschluß der Behörde seit dem 10. Januar dieses Jahres an der Gelehrtenschule des Johanneums fortzusetzen und gleichzeitig als Hilfslehrer daselbst verwandt zu werden. Weiter wurde Herr *Franz Kersten* dem Wilhelm-Gymnasium zur Ableistung des pädagogischen Probejahres zugewiesen und trat anfangs März in seine neue Thätigkeit ein.

4. Vertretungen. Das verstrichene Schuljahr brachte eine große Anzahl von Unterbrechungen des regelmäßigen Unterrichtes durch Erkrankungen und sonstige Verhinderungen der Herrn Kollegen. Herr Dr. *Keferstein* wurde zu einer achtwöchentlichen Übung einberufen, Herr Dr. *Hansen* mußte in Folge eines Unfalls mehrere Wochen fehlen. Herr Prof. *Barthold* erkrankte während der Weihnachtsferien schwer und wurde bis auf Weiteres beurlaubt. Herr Direktor *Pauli* schließlich wurde zuerst seit Anfang Juli bis nach den großen Ferien, dann seit dem 19. Januar bis Ende Juni dieses Jahres zur Wiederherstellung seiner angegriffenen Gesundheit gleichfalls beurlaubt. Als Ersatz für die beiden letztgenannten Herrn wurde zuerst Herr Oberlehrer Dr. *Goepel*, vierzehn Tage später der Unterzeichnete aus dem Verbande des Johanneums dem Wilhelm-Gymnasium bis auf Weiteres überwiesen. Ersterer wurde am 10. Januar noch durch Herrn Direktor *Pauli* in seine Stellung eingeführt; Letzteren, dem durch Beschluß der Behörde vom 19. Januar die Stellvertretung des mittlerweile beurlaubten Direktors des Wilhelm-Gymnasiums übertragen worden war, betraute am 23. Januar der Oberbeamte der Oberschulbehörde, Herr Prof. Dr. *Hoche*, mit seinem neuen Amte.

5. Feste. Am 18. Juni, als am Tage der Beisetzung weiland Sr. Majestät des Kaisers Friedrich, wurde unter Ausfall des gewöhnlichen Unterrichts ein feierlicher Traueraktus abgehalten, bei welchem Herr Professor *Rambeau* die Gedächtnisrede übernommen hatte

[2]) *Wilhelm Dettmer,* geboren am 27. September 1861 zu Lübeck als Sohn des dortigen Prof. Dr. K… Heinrich Dettmer, evangelischer Konfession, besuchte das Gymnasium zu Lübeck, das er Ostern 18… mit dem Zeugnis der Reife verließ, um in Tübingen, Göttingen, München und Kiel klassische Philologie, Archaeologie und Kunstgeschichte, Germanistik, französische Sprache und Religionswissenschaft zu studieren. Im Frühjahr 1886 bestand er in Kiel die Prüfung für das höhere Lehramt und trat im Herbst desselben Jahres an der Gelehrtenschule des Johanneums zu Hamburg das pädagogische Probejahr an. Hier war er bis Michaelis 1888 als wissenschaftlicher Hilfslehrer thätig, trat als solcher an das Wilhelm-Gymnasium über und wurde Januar 1889 als ordentlicher Lehrer an demselben angestellt.

— Die Erinnerung an den Tag von Sedan wurde am 1. September in gewohnter Weise begangen; Herr Oberlehrer Dr. *Schnee* hielt die Ansprache. — Am 19. September feierte das Christianeum in Altona den Tag seines hundertfünfzigjährigen Bestehens; auch vom Wilhelm-Gymnasium hatte sich eine Deputation, bestehend aus den Herren s. t. *Pauli, Barthold, Klamroth,* dorthin begeben, um Glückwünsche auszusprechen. — Am 18. Oktober, als am Geburtstage des verstorbenen Kaisers Friedrich, wurde im Anschluß an die ersten drei Schulstunden eine Gedächtnisfeier mit Gesang und Deklamation veranstaltet, bei welcher Herr Oberlehrer Dr. *Glänzer* des edlen Herrschers und zugleich auch der Leipziger Schlacht gedachte. — Am 29. Oktober bei Gelegenheit der Zollanschlußfeierlichkeiten war unsern Schülern im Verein mit den Schülern der Gelehrtenschule des Johanneums Gelegenheit gegeben von der Kornhausbrücke aus ihren Kaiser zu sehen und einzustimmen in den begeisterten Jubel, mit welchem derselbe allseitig begrüßt wurde. — Am 26. Januar wurde eine öffentliche Vorfeier des Geburtstages des Kaisers Wilhelm II. in bräuchlicher Weise mit Gesang und Deklamation abgehalten, bei welcher Herr Professor *Jacoby* die Festrede hielt.

6. Bauliches. Die räumlichen Verhältnisse der Anstalt haben im verflossenen Schuljahre eine Veränderung nicht erfahren. Als ein dringendes Bedürfnis muß es bezeichnet werden, daß endlich die Holzpflasterung vor dem Wilhelm-Gymnasium vorgenommen wird. Weder die Frische der Unterrichtenden, noch die Aufmerksamkeit der Unterrichteten gewinnt durch das Wagengerassel und den Lärm der grade vor der Anstalt sich kreuzenden Pferdebahnen.

7. Der Gesundheits-Zustand der Schüler zeigte in dem verflossenen Schuljahr keine besonderen Unregelmäßigkeiten. Durch den Tod verloren wir zwar keinen Schüler, dagegen brach ein Knabe ein Bein durch Ausgleiten in dem glatten Lichthofe.

8. Über die Zuwendungen, welche die Bibliothek und die übrigen Sammlungen des Wilhelm-Gymnasiums, sowie die bescheidenen Anfänge der Witwenkasse im Laufe dieses Jahres erhalten haben, wird weiter unten an den gegebenen Stellen berichtet werden.

II. Statistisches.

A. Das Lehrerkollegium

besteht gegenwärtig aus 30 ~~ordentlichen~~ Mitgliedern. In der folgenden Übersicht entsprechen die einzelnen Gruppen den Rubriken des Staatsbudgets. Die Reihenfolge innerhalb derselben richtet sich, ohne einen Rangunterschied zu begründen, nach dem Datum des Eintritts in die bestimmte Gehaltsklasse:

1. Professor Dr. *Otto Pauli*, Direktor, seit Neujahr 1887 (beurlaubt);
2. Professor Dr. *Julius Bintz*, stellvertretender Direktor, seit 23. Januar 1889;
3. Professor Dr. *Ernst Reinstorff*, seit Ostern 1881;
4. Professor Dr. *Theodor Barthold*, seit Michaelis 1885 (beurlaubt);
5. Professor Dr. *Karl Jacoby*, seit Ostern 1886;
6. Professor Dr. *Friedrich Schader*, seit Ostern 1887;
7. Professor Dr. *Heinrich Christensen*, seit Ostern 1887;
8. Professor Dr. *Adolf Rambeau*, seit Ostern 1888;
9. Dr. *Karl Goepel*, Oberlehrer, seit 10. Januar 1889 (vorher an der Gelehrtenschule des Johanneums seit Ostern 1882);
10. Dr. *Rudolf Schnee*, Oberlehrer seit Michaelis 1884;
11. Dr. *Karl Glänzer*, „ „ Ostern 1886;
12. Dr. *Karl Dissel*, „ „ „ 1886;
13. Dr. *K. W. Augustin*, „ „ „ 1887;
14. Dr. *Max Klussmann*, „ „ „ 1887;
15. Dr. *Albert Wilms*, „ „ „ 1887;
16. Dr. *Martin Klamroth*, „ „ Michaelis 1887;
17. Dr. *Gustav Bromig*, „ „ Ostern 1888;
18. Dr. *Heinrich Hansen*, ord. wissenschaftlich. Lehrer, seit Michaelis 188
19. Dr. *Johannes Keferstein*, „ „ „ „ 1. Mai 1885;
20. *Eduard Kümpel*, „ „ „ „ Ostern 1886;
21. Dr. *Max Kleinschmit*, „ „ „ „ 1. Juli 1886;
22. Dr. *Paul Weise*, „ „ „ „ Michaelis 188
23. Dr. *Johannes Böhme*, „ „ „ „ „ 188
24. Dr. *Friedrich Brachmann*, „ „ „ „ „ 188
25. Dr. *Otto Boensel*, „ „ „ „ Ostern 1888;
26. *Wilhelm Dettmer*, „ „ „ „ 1. Januar 188
27. *Julius Lieberg*, ord. technischer Lehrer, seit Ostern 1881;
28. *Friedrich Wendt*, „ „ „ „ Michaelis 1882;
29. *Otto Waldbach*, „ „ „ „ „ 1887;
30. *Franz Kersten*, Cand. prob., seit März 1889.

B. Die Schüler.

I. Allgemeine Übersicht.

	Ia		Ib		IIa		IIb		IIIa		IIIb		IV		V		VI		Zusammen:	Gegen d. Vorjahr:	
	O	M	O	M	O	M	O	M	O	M	O	M	O	M	O	M	O	M		+	—
A. Winter-Halbjahr 1887/88:																					
1. Bestand am 1. Februar 1888	10	6	19	17	26	11	33	22	32	19	41	29	33	34	42	37	42	37	490	..	..
2. Abgang bis 31. März	10	..	..	..	6	1	4	..	..	1	3	..	3	1	6	5	1	1	42	..	..
3. Rest-Bestand am 31. März (1—2)	..	6	19	17	20	10	29	22	32	18	38	29	30	33	36	32	41	36	448	9	..
4. in höhere Klassen traten	..	..	12	..	19	..	23	..	30	..	24	..	25	..	27	..	33	..	193	2	..
5. in andere Abteilungen traten	..	..	7	..	1	1	6	..	2	2	11	..	5	1	7	2	8	1	54	..	16
6. in ihren Klassen blieben	..	6	..	17	..	9	..	22	..	16	3	29	..	32	2	30	..	35	201	23	..
7. Zugang von 4	12	..	19	..	23	..	30	..	24	..	25	..	27	..	33	..	..	..	193	2	..
8. Zugang von 5	..	..	..	7	1	1	..	6	2	2	..	11	1	5	2	7	1	8	54	..	16
B. Sommer-Halbjahr 1888:																					
9. Bestand (6+7+8)	12	6	19	24	24	10	30	28	26	18	28	40	28	37	37	37	1	43	448	9	..
10. Aufnahme	..	..	..	..	2	..	3	3	1	..	1	1	1	1	2	3	42	3	63	6	..
11. Gesamtzahl (9+10)	**12**	**6**	**19**	**24**	**26**	**10**	**33**	**31**	**27**	**18**	**29**	**41**	**29**	**38**	**39**	**40**	**43**	**46**	**511**	**15**	..
12. Abgang bis 30. Sept.	..	2	..	4	3	3	1	3	1	3	1	4	1	2	3	4	2	3	40	..	6
13. Rest-Bestand am 30. Sept. (11—12)	12	4	19	20	23	7	32	28	26	15	28	37	28	36	36	36	41	43	471	21	..
14. in höhere Klassen traten	..	..	..	12	..	7	..	13	..	10	..	26	..	27	..	28	..	32	155	..	8
15. in andere Abteilungen traten	..	4	..	8	..	..	..	12	1	4	1	11	..	9	..	6	..	7	63	6	..
16. in ihren Klassen blieben	12	..	19	..	23	..	32	3	25	1	27	..	28	..	36	2	41	4	253	23	..
17. Zugang von 14	..	12	..	7	..	13	..	10	..	26	..	27	..	28	..	32	..	..	155	..	8
18. Zugang von 15	4	..	8	..	..	..	12	..	4	1	11	1	9	..	6	..	7	..	63	6	..
C. Winter-Halbjahr 1888/89:																					
19. Bestand (16+17+18)	16	12	27	7	23	13	44	13	29	28	38	28	37	28	42	34	48	4	471	21	..
20. Aufnahme	..	..	..	1	2	2	..	..	1	2	..	1	..	..	2	3	..	32	46	..	8
21. Gesamtzahl (19+20)	**16**	**12**	**27**	**8**	**25**	**15**	**44**	**13**	**30**	**30**	**38**	**29**	**37**	**28**	**44**	**37**	**48**	**36**	**517**	**13**	..
22. Abgang bis 31. Januar	..	1	4	1	3	..	..	..	1	..	..	1	..	..	5	..	2	..	18	..	..
23. Bestand am 1. Februar (21—22)	16	11	23	7	22	15	44	13	29	30	38	28	37	28	39	37	46	36	499	..	..

2. Bekenntnis der Schüler:

Es waren:	A. Sommer-Halbjahr 1888:	Gegen das Vorjahr: +	Gegen das Vorjahr: −	B. Winter-Halbjahr 1888/89:	Gegen das Vorjahr: +	Gegen das Vorjahr: −
1. Evangelische [1]	401 = 78,47 %	..	..	406 = 78,53 %	..	..
2. Katholiken	17 = 3,33 „	..	..	7 = 1,35 „	..	..
3. Juden	82 = 16,05 „	..	..	94 = 18,18 „	..	..
4. Bekenntnislose	11 = 2,15 „	..	..	10 = 1,93 „	..	..
	511 = 100,00 %	15	..	517 = 99,99 %	13	..

3. Geburtsort der Schüler:

Es waren gebürtig:	A. Sommer-Halbjahr 1888:	Gegen das Vorjahr: +	Gegen das Vorjahr: −	B. Winter-Halbjahr 1888/89:	Gegen das Vorjahr: +	Gegen das Vorjahr: −
1. aus dem Staate Hamburg	363 = 71,04 %	..	..	368 = 71,18 %	..	..
2. aus dem übrigen Deutschland	106 = 20,74 „	..	..	109 = 21,08 „	..	..
3. aus dem übrigen Europa	18 = 3,52 „	..	..	17 = 3,29 „	..	..
4. aus außereuropäischen Ländern	24 = 4,70 „	..	..	23 = 4,45 „	..	..
	511 = 100,00 %	15	..	517 = 100,00 %	13	..

4. Heimat (d. h. Wohnort der Eltern) der Schüler:

Es wohnten:	A. Sommer-Halbjahr 1888:	Gegen das Vorjahr: +	Gegen das Vorjahr: −	B. Winter-Halbjahr 1888/89:	Gegen das Vorjahr: +	Gegen das Vorjahr: −
1. im Staate Hamburg	490 = 95,89 %	..	..	487 = 94,20 %	..	..
2. im übrigen Deutschland	17 = 3,33 „	..	..	19 = 3,68 „	..	..
3. im übrigen Europa	....	..	..	2 = 0,39 „	..	..
4. in außereuropäischen Ländern	4 = 0,78 „	..	..	9 = 1,74 „	..	..
	511 = 100,00 %	15	..	517 = 100,01 %	13	..

[1]) Unter dieser Bezeichnung sind zusammengefaßt: Evangelisch-Lutherische, Evangelisch-Unierte, Deutsch-Reformierte, Mennoniten und Baptisten.

5. Lebensalter der Schüler im Winter-Halbjahre:

Geburtsjahr:	I a O	I a M	I b O	I b M	II a O	II a M	II b O	II b M	III a O	III a M	III b O	III b M	IV O	IV M	V O	V M	VI O	VI M	Zus.
1879	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	12	23	35
1878	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	11	21	29	11	72
1877	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	8	12	24	12	7	2	65
1876	..	..	..	..	..	..	..	..	..	2	7	11	20	10	8	4	..	..	62
1875	..	..	..	..	..	..	..	..	7	9	14	11	9	6	1	..	..	..	57
1874	..	..	..	..	..	..	8	7	11	12	15	7	..	..	..	..	..	..	60
1873	..	..	..	..	1	8	13	5	8	5	2	..	..	..	..	..	..	..	42
1872	..	..	2	5	12	2	8	1	2	2	..	..	..	..	..	..	..	..	34
1871	3	4	12	1	8	3	4	..	2	..	..	..	..	..	..	..	..	..	37
1870	3	4	5	1	2	..	10	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	25
1869	3	2	3	1	1	2	1	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	13
1868	4	1	4	..	1	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	10
1867	1	1	1	.	..	..	.	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	3
1866	2	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	2
1865	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..
Zusammen	16	12	27	8	25	15	44	13	30	30	38	29	37	28	44	37	48	36	517
Durchsch.-Alter 1. Jan. 1889: Jahre:	19,77	19,25	18,46	17,75	16,78	16,54	16,51	15,00	14,85	14,41	13,86	13,86	12,54	12,27	11,44	11,04	10,16	9,92	

6. Abgang vom 1. Februar 1888 bis 31. Januar 1889:

Abgegangen sind:	I a O M mit Zeugnis der Reife	I a O M ohne Zeugnis der Reife	I b O M	II a O M	II b O M mit Militär-Zeugnis	II b O M ohne Militär-Zeugnis	III a O M	III b O M	IV O M	V O M	VI O M	Zus.
I. wegen Krankheit	..	1	1	1	..	..	1	1	..	1	..	6
Summe I.	..	1	1	1	..	..	1	1	..	1	..	6
II. Zu weiterem Unterrichte:												
auf Universitäten	11	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	11
„ Gymnasien und Progymnasien	..	..	4	2	..	2	4	3	1	3	2	21
„ Realgymnasien und Realprogymnasien	..	..	..	1	1	..	..	3	2	1	..	8
„ Real- und höhere Bürgerschulen	..	..	..	..	..	..	..	2	3	11	5	21
„ militärische Bildungsanstalten	..	..	..	..	..	..	..	..	..	1	..	1
„ andere Schulen	..	..	..	1	..	..	..	..	1	..	..	2
in Privat-Unterricht	..	..	..	..	..	..	..	..	..	6	1	7
Summe II.	11	..	4	4	1	2	4	8	7	22	8	71
III. In das Berufsleben:												
um Kaufmann zu werden	..	..	2	5	2	.	1	.	..	..	..	10
„ Beamter „ „	1	..	2	2	..	2	..	..	..	..	..	7
„ Lehrer „ „	..	..	..	2	..	..	..	..	..	..	..	2
„ Zahnarzt „ „	..	..	..	1	..	..	..	..	..	..	..	1
„ sich dem Maschinenfach zu widmen	..	..	..	..	..	1	..	..	..	..	..	1
Summe III.	1	..	4	10	2	3	1	..	..	..	..	21
IV. Unbestimmt oder unermittelt	..	..	..	1	..	..	..	..	..	..	1	2
Zusammen	12	1	9	16	3	5	6	9	7	23	9	100

7. Zahl der Freischüler (von Ostern 1888 bis Ostern 1889):

	Schüler	Ganze Freischüler: a. Lehrer-Söhne	Ganze Freischüler: b. durch Bewilligung	Zusammen a + b	Halbe Freischüler: c. Pastoren-Söhne [1])	Halbe Freischüler: d. durch Bewilligung	Zusammen c + d	Gesamt-Erlaß an Schulgeld $\left(a+b+\frac{c+d}{2}\right)$
1. Vierteljahr	513	18	16	34 = 6,63 %	3	10	13 = 2,53 %	7,90 %
2. „	507	18	17	35 = 6,90 „	3	11	14 = 2,76 „	8,28 „
3. „	532	16	16	32 = 6,02 „	3	11	14 = 2,63 „	7,34 „
4. „	509	16	15	31 = 6,09 „	3	10	13 = 2,55 „	7,37 „
Durchschnitt	515	17	16	33 = 6,41 %	3	10,50	13,50 = 2,62 %	7,72 %

C. Die Entlassungs-Prüfungen.

1. Folgende Oberprimaner erhielten das Zeugnis der Reife:

Lfd. Zahl seit 1887	Name:	Geburtsort:	Geburtsjahr:	Bekenntnis:	Stand des Vaters:	Wohnort:	Hiesiger Schulbesuch Jahre: überhpt.	in I	in Ia	Erwählter Beruf:
	4. Prüfung am 3. September 1888 (Vertreter der O. S. B.: Prof. Dr. *Hoche*, Oberbeamter der O. S. B).									
20	1. *von Schmeling, Wilhelm*	Berlin	1869	evg.	Oberstlieut.	Erfurt	3½	2	1	Rechte und Staatswissensch
21	2. *Vorwerk, Alfred*	Hamburg	1869	evg.	Kaufmann	Hamburg	6½	2	1	Rechte

2. Die Aufgaben zu den schriftlichen Arbeiten waren folgende:

1. Deutscher Aufsatz:
   Warum erweckt das Zeitalter der Hohenstaufen unsere besondere Teilnahme?
2. Lateinischer Aufsatz:
   Roma quid debeat Scipionibus narratur.
3. Mathematische Arbeiten:
   1) Ein Dreieck zu konstruieren aus einer Seite a, dem Verhältnis der den beiden anderen Seite zugehörigen Höhe h' : h'' = n : m und der Differenz der der ersten Seite anliegenden Winkel $\beta - \gamma =$ — 2) Die Summe zweier Zahlen ist gleich 3, die Summe ihrer fünften Potenz gleich 3 (5_3+1). Welche sind die Zahlen? — 3) Wie groß sind die Winkel eines Dreiecks, wenn ihre trigonometrisch Tangenten drei auf einander folgende ganze Zahlen bilden? — 4) Um ein gerades regelmäßig dre seitiges Prisma, dessen Grundkante a = 12 cm gegeben ist und dessen Seitenflächen zusammen gleic der Summe der beiden Grundflächen sind, ist eine Kugel beschrieben. Wie groß muß die Kant eines regelmäßigen Oktaeders sein, welches mit dieser Kugel gleiches Volumen hat?
   Außerdem 4 schwierigere Sonder-Aufgaben.

4 und 5. Je eine Übersetzung in das Lateinische und das Französische.

Über den Ausfall des diesjährigen Abiturientenexamens kann erst im nächsten Programm berichtet werden.

[1]) d. h. Söhne der vor dem 13. Januar 1876 in ihr Amt eingetretenen evang. Geistlichen.

III. Lehrwesen.

1. Allgemeiner Lehrplan.

Lehrfächer:	Ia O	Ia M	Ib O	Ib M	IIa O	IIa M	IIb O	IIb M	IIIa O	IIIa M	IIIb O	IIIb M	IV O	IV M	V O	V M	VI O	VI M
	Zahl der wöchentlichen Stunden in den Klassen:																	
A. Verbindlicher wissenschaftlicher Unterricht:																		
1. Religionslehre (für Evangelische)	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
2. Deutsch	3	3	3	3	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	3	3
3. Lateinisch	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	10	10	8	8	8	8
4. Griechisch	6	6	6	6	6	6	7	7	7	7	7	7	..	..	..	..	..	..
5. Französisch	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	4	4	4	4	..	..
6. Englisch	2	2	2	2	2	2	2	2	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..
7. Geschichte und Erdkunde	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	4	4	3	3	3	3
8. Mathematik (Rechnen)	4	4	4	4	4	4	3	3	3	3	3	3	4	4	3	3	4	4
9. Naturwissenschaft	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
Zusammen	32	32	32	32	31	31	31	31	29	29	29	29	28	28	24	24	22	22
B. Nichtverbindlicher und Fertigkeits-Unterricht:																		
10. Hebräisch [1])	2	2	2	2	2	2	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..
11. Zeichnen [2])	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
12. Schreiben	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	1	1	2	2	2	2
13. Singen	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
14. Turnen [3])	2(3)	2(3)	2(3)	2(3)	2(3)	2(3)	2(3)	2(3)	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
Zusammen	7(8)	7(8)	7(8)	7(8)	8(9)	8(9)	6(7)	6(7)	6	6	6	6	7	7	8	8	8	8

[1]) in 2 Abteilungen.
[2]) für I und II nichtverbindlich in 1 Abteilung.
[3]) die eingeklammerte Stunde ist für die Vorturner.

2. Übersicht der in den sen behandelten Lehraufgaben.

Lehrgegenstand	Oberprima	Unterprima	Obersekunda	Untersek	bertertia	Untertertia	Quarta	Quinta	Sexta
1. Religionslehre.	S.: Ökumen. und Sondersymbole; Erklärung der Augustana. W.: Kirchengesch.	S.: Leben u. Briefe des Paulus. Römerbrief. Jakobusbrief. W.: Glaubenslehre; Übersicht über die andern Religionen.	S.: Leben des Paulus. Lekt. der Apostelgesch. Ausgew. Stücke aus den Briefen. W.: Einf. in das A. T.	Einl. in da Lektüre der E u. Joh. im	der Apostelgesch. Bilder aus der hengeschichte. hol. d. Hauptst. u. nlied. Auswendig- n von Psalmen.	Lesen u. Erkl. d. Ev. Luc. m. Ergänz. a. d. andr. Synopt. Bibelk. d. A. u. N. T. Kirchenjahr, Ordn d. Gottesd. — Kat. ü. d. 2. Art. u. d. 3. Hptst. — Bibelspr. u. Kirchenl.	Gesch. d. Reiches Gottes im A. T. — Das 2. Hauptstück, Erklärg d. 1. Hptstücks u. des 1. Artikels. Sprüche, Lieder. Geogr. von Palästina.	Bibl. Gesch. des N. T. 2. Hauptstück ohne, 3. Hauptstück mit Erkl. Sprüche. Lieder. Allgem. Geographie Palästinas.	Bibl. Gesch. d. A. T. bis Salomo. Festgeschichten. Das 1. Hauptstück mit Luthers Erklär. Vater-unser. Sprüche. Kirchenlieder.
2. Deutsch.	Goethes Götz von Berlichingen, Clavigo, Tasso. Ged. mit Ausw. Dichtung und Wahrheit mit Ausw. Lessings Abhandlg. von der Fabel, Laokoon. Privatim: Egmont, Iphigenie, Faust, Braut von Messina. 7 Aufsätze.	Braut v. Mess. (v. Stellen ausw.) Rep.: Wilh. Tell, Jungfr. v. Orl., M. Stuart. Schw. lyr. Ged. — Schillers Leben. — W. v. d. Vogelw. (4Gd. ausw.). Klopst. (2Gd. aw.). Luther, Hans Sachs. Dazu nach Kluge d. betr. Abschn. Priv.: Em. Gal., Nath., Abhdl. ü. d. Fabel, Egm., Abfall d. Niedl., Cid, Kaufm. v. Vened. Dispos.-Übungen. Vortr. 8 Aufs.	Lessings Minna v. Barnhelm, Schillers Maria Stuart, Jungfr. v. Orleans. Wiederhlg. Schillerscher Balladen. — Lessings u. Schillers Leben n. Kluge. Dispositionsübungen. Vorträge. 10 Aufsätze.	Lesen und der Balladen Goethes und Lektüre des N liedes u. ein der Edda. Wi Poetik: Epos 4wöch. ein	und Erklären von ten nach H. u. P. orträge. Satzlehre. ehre. Disponierübungen. ch. 1 Aufsatz.	Lesen u. Erkl. nach H. u. P. Übg. im Wiedererz. u. Dekl. — Die gebräuchlichsten Versmaße. — Satzlehre. — Übungen im Disponieren. 3wöch. ein Aufsatz.	Lesen u. Erkl. nach H. u. P. Übg. im Wiedererz. u. Deklamieren. Wiederh. der Hauptregeln der Rechtschreibg; die häufigsten Fremdw. Starke u. schw. Konjug., Ergänzg. d. Satzlehre, zusammengezog. u. zusammengesetzter Satz. 3wöch. ein Aufs. od. Diktat.	Lesen u. Erkl. nach H. u. P. Übg. im Wiedererz. u. Deklamieren. Starke u. schw. Konjug. Praeposit., adv. Bestimm. Der erweiterte Satz. Interpunktionsleh. Orthogr. Übungen. 2wöch. eine schriftl. Arb.	Lesen u. Erklären n. H. u. P. Übgn. im Wiedererzählen u. Deklamieren. Der einfache Satz. Orthographische Übungen. Wöch. ein Diktat.
3. Lateinisch.	Hor. Carm. (bes. lib. III, IV). Sat., Ep. m. Ausw. Cic. de off. lib. I. Tac. Agr. Annal. lib. I. mit Ausw. Privatim: Cic. pro Lig., pro Dejotaro. Stil. Übg. Whlg. aus sämtlichen Gebieten der Grammatik. Übers. aus Süpfle III. Wöch. Exerc. oder Ext. 8 Aufsätze.	Horat. carm. lib. I, II. Satir., Epist. m. Auswahl. Cic. pro Mil., in C. Verrem act. II lib. IV. Tac. Germ. c. 1—27; 28 b. Schluß priv. Sprechüb. i. Anschl. a. d. Lkt. Stil. Üb. Rep. a. sämtl. Gebieten der Grammatik. Mündl. Übers. a. Süpfle III. Wöch. Exerc. oder Ext. 8 Aufsätze.	Verg. Aen. II, V. Cic. pro lege Manil., de amic. Liv. I. Gramm. Rep. Ausgew. a. d. Stilistik. — Mündliche Übersetz. aus Süpfle II. Wöch. ein Exerc. od. Ext. 4 Aufsätze.	Vergil Ae Cic. pro regel I. Catil. I. IV. Ergänzung d 14täg. ein Ext	r b. g. I—VII. ahl aus Ovid. Wiederholung d. en der V—III b. und Moduslehre. 1 Ext. od. Exerc.	Caes. b. g. I—IV. Ausw. a. Tir. p. — Rep. d. Casusl. — Grundzüge der Tempus- und Moduslehre. — Mdl. u. schriftl. Übers. aus Warschauer. Wöch. ein Ext. od. Exerc.	Nepos adauctus, Phaedr., Tiroc. m. Auswahl. Rep. der Formenl. Casuslehre. Mündl. u. schriftl. Übersetzung n. Busch. Wöch. ein Ext. od. Exerc.	Abschl. der Formenlehre. Die einfachsten syntakt. Regeln. Mündl. u. schriftl. Übersetzung aus Busch. Wöch. ein Ext. od. Exerc.	Regelm. Formenlehre. Systemat. Vokabellernen. Übersetzen aus Busch. Wöch. ein Ext. od. Exerc.
4. Griechisch.	Hom. Ils. I, II, III, XIII, XIV, XV, XXIII ganz, VI, XXI, XXII, XXIV m. Auswahl. Soph. Antig. Thuc. I, 1—57 und V. mit Ausw. Lys. R. geg. Leokr.; Isokr. Paneg. Dem. ol. Rdn., phil. R. 1, 2, 3.	Hom. Ils. I—VI. Soph. Ajax. Herod. VIII. Plat. ap., Krit. Priv. Demosth. Ol. Reden. Regelm. Übersetzungen aus Nicolai.	Hom. Od. VIII-X, XII-XIII, privat I-IV, XI. Lys., Red. g. Erat. Herod. V. Wiederh. d. Gramm. Syntax bis einschl. Particip. Übersetz. aus Nicolai. 2wöch. ein Ext.	Hom. Od. V. Xen. an. IV. II. III. Lys. Gramm. n. K Repet. der F Übers. au Wöch. ein Ex	Anab. IV. Ausw. aus I, V. Od. I, 1—80. d. Formenlehre. n Ext. od. Exerc.	Formenlehre bis einschl. verba liquida. Übers. aus Wesener. Wöch. ein Ext. od. Exerc.			
5. Französisch.	Phonet. Übungen. Gramm. Wiederholungen. Lekt.: Mignet, Molière. Deklam., Vorträge. 3wöch. ein Ext. od. Exerc.	Phonet. Übungen. Gramm. Wiederholungen. Lekt.: Mignet. Deklamat., Vorträge. 3wöch. ein Ext. od. Exerc.	Phonet. Übungen. Syntax d. Verbums (Tempora u. Modi) n. Lück. Lekt.: Thiers. Dekl., Vortr. 3wöch. ein Ext. od. Exerc.	Phon. Übunge u. Syntax (V Lücking. Le Deklamation 3wöch. ein E	Rep. d. Formen- ücking § 48—120. deck. II, 153—169. Haupts. a. d. frz. Retrovertieren. 1. ein Extemp.	Gramm.: Formenlehre n. Lücking. Lekt.: Gesch. u. Erzählg. aus Lüdecking I. Retrovert. u. Sprechübg. 3wöch. ein Extemp.	Phonet. Übungen. Plattners Elementarbuch, Cap. XI—XXVII. Ged. u. Erzählg. Sprechübgn. im Anschl. a. d. Lesestücke. 2wöch. ein Ext. od. Exerc.	Phonet. Übungen. Plattner Cap. I—X. Ged. u. Erzählg. Sprechübgn. im Anschl. a. d. Lesest. 2wöch. ein Ext. od. Exerc.	
6. Englisch.	Phonet. Übungen. Gramm. Wiederholungen. Lekt.: Macaulay, Shakespeare. Deklam., Vorträge. 3wöch. ein Ext. od. Exerc.	Phonet. Übungen. Syntax nach Petry. Lekt.: Mc Carthy. Deklamat., Vorträge. 3wöch. ein Ext. od. Exerc.	Phonet. Übungen. Syntax nach Petry. Lekt.: Lüdekings Leseb. Smiles: G. Stephenson. Dekl., Vortr. 3wöch. ein Ext. od. Exerc.	Phon. Übung n. Victors Sprechübung nach Lüdeck lungen u. 3wöch. ein E					
7. Geschichte und Geographie.	Neuere Geschichte b. 1815 nach Herbst III. Repetition der alten und mittleren Geschichte.	Gesch. d. Mittelalters m. bes. Berücks. der außerdeutschen Länder bis z. Augsbg. Religionsfrieden. Geogr. Wiederh. (Europa).	Röm. Gesch. b. z. Kaiserzeit mit bes. Rücks. auf die Verfassungs-Entw. Wiederh. der Geogr. der außereurop. Länder.	Griech. Ge Diado Geogr. der Erd	e Gesch. von der tion b. z. Gegenw. außerd. Länder Europas.	Deutsche Gesch. bis zur Reformation. Deutschland, phys. und politisch.	Das Wichtigste aus der alten Gesch. — Geogr. v. Altgriechenl. u. Altitalien. Allg. Überbl. üb. Europa, Alpen, West- u. Südeuropa.	Griech., röm. u. deutsche Sagengesch. Wiederhol. u. Erweit. d. geogr. Grundbegriffe. Die aussereurop. Erdteile.	Die geogr. Grundbegr. Erweiterung der Heimatskunde. Allg. Übersicht d. Erdgliederung. Geogr. v. Europa, bes. v. Deutschl.
8. Mathematik und Rechnen.	Wiederh. d. Ster., Plan., Trig. u. d. früh. arithm. Pensen, Kub. Gleichung., Faktoriellen arithmet. Reihen höh. Ordn., Kombinations-Lehre, binom. Lehrsatz, Wahrscheinlk.-Rechn. Einführung in die synthetische Geometrie. 3wöch. eine schriftl. Arbt.	Trigonometrie. Anwendg. der Algebra auf planimetrische Aufgaben. Zinseszins- und Rentenrechnung. Stereometrie. 3wöch. eine schriftl. Arb.	Wurzeln. Imag. Zahlen. Logar. Expon. u. Wurzel-Gleich. Gleich. 2. Gr. m. 1 Unb. Arithm. u. geom. Reihen. Zinseszins- und Rentenr. Ausm. d. geradl. Fig. u. d. Kreises. Anwend. d. Algebra auf die Geom. Geom. Constr.-Aufg. 3wöch. ein Ext. od. Exerc.	Schluß d. Kr d. Fig. Pro Ähnlichk. d Aufg. Pote tionen, Qu aus Quadra gekleid. Gle 3wöch. ein	d. Pens. d. IIIb. leich., Verwandl. ng geradl. Fig. ufg. D. 4 Grund- Buchst.-Größen. Gleichg. 1. Grd. it 1 Unb. n Ext. od. Exerc.	Kongr. d. Dreiecke, Parallelogramme; Konstrukt.-Aufgab. Buchst.-Rechng. Addit., Subtract., Multipl. Einf. Gleichg. 1. Gr. 3wöch. eine schriftl. Arb.	Wiederh. u. Erweiterung d. Rechn. m. gem. u. Dez.-Brüchen. Einfache u. zusammenges. Regeldetri. Zinsrechnung. Geometr. Spicker § 1—39. 2wöch. ein Ext. od. Exerc.	Die Rechnung mit gemeinen und Dezimalbrüchen. Einfache Regeldetri-Aufgaben. 3wöch. ein Ext. od. Exerc.	Rep. d. 4 Grundrechnungsarten mit unben. ganzen Zahlen. D. gr. Einmaleins. Münzen, Maaße u. Gew. Resolvieren u. Reduzier. Die 4 Grundrechnungsarten m. ben. Zahlen. Elemente d. Bruchrechnung. Wöch. 2 schriftl. häusl. Arb. 2 wöch. Ext.
9. Naturwissenschaft.	Wärmelehre, Akustik, Optik.	Mechanik, mathemat. Geographie.	Magnetismus und Elektrizität.	Grundbegri d. wichtigst u. ihre V Allg. Eigen Hydrostat	u. Physiol. der Pflanzengeogr. estimm. — Anat. L. des Menschen ere. Ernährung lichen Körpers. geographie.	Wiederh. d. Morphologie, D. wicht. natürl. Pflanzenfamil. Bestimmen d. Pflanzen u. d. natürl. System. D. natürl. Familien, Ordn. etc. d. wirbell. Tiere.	S.: Die Insekten in ihr. Bezieh. z. Pflanzenwelt. Anl. z. Bestimmen n. Baenitz u. Augustin. W.: Syst. Betracht. d. nat. Famil., Ordn. u. Klass. d. Wirbeltiere n. Baenitz.	Vgl. Pflanzenbeschr. Morpholog. Pflanz.-Bestimm. n. d. Linnéschen Syst. Einige Säugetiere, Vögel, Kriechtiere, Lurche, Fische, Insekten, Spinnen, Krustentiere u. Würmer.	S.: Beschr. einz. einheim. Pflanzen. Entwickl. morpholog. Grundbegr. W.: Beschr. einz. Arten als Repräsent. aus d. Kl. d. Säugetiere, Vögel, Kriechtiere, Lurche, Fische u. Insekten n. Baenitz.

3. Übersicht der im Schuljahre 1889/90 gebrauchten Lehrbücher.

Lehrgegenstand:	Oberprima	Unterprima	Obersekunda	Untersekunda	Obertertia	Untertertia	Quarta	Quinta	Sexta
1. Evang. Religionslehre.	Novum Testamentum (Graece ed. Buttmann). Schäfer, Lehrb. f. d. ev. Rel.-Unterr. 3 T. Ausg. B. Schulgesangb.	Novum Testamentum (Graece ed. Buttmann), Schäfer, Lehrb. f. d. ev. Rel.-Unterr. 3 T. Ausg. B. Schulgesangb.	Novum Testamentum (Graece ed. Buttmann). Neues Testam. Schäfer, Lehrb. f. d. ev. Rel.-Unterr. 3 T. Ausg. B. Schulgesangb.	Neues Testam. Schäfer, Lehrb. f d. ev. Rel.-Unterr. 3 T. Ausg. B. Schulgesangb.	Neues Testam. Schäfer, Lehrb. f. d. ev. Rel.-Unterr. 3 T. Ausg. B. Schulgesangb.	Luth. kl. Katech. (Ges. d. Fr. d. vat. Erziehungsw.) Neues Testam. Schäfer f. Mittel- und Unterkl. Schulgesangb.	Luth. kl. Katech. (Ges. d. Fr. d. vat. Erziehungsw.) Schäfer f. Mittel- und Unterkl. Schulgesangb.	Luth. kl. Katech. (Ges. d. Fr. d. vat. Erziehungsw.) f. Schäfer, Lehrb. d. ev. Relig. 2. T. obere Stufe I. Schulgesangb.	Luth. kl. Katech. (Ges. d. Fr. d. vat. Erziehungsw.) Schäfer, Lehrb. f. d. ev. Relig. 2. T. obere Stufe I. Schulgesangb.
2. Deutsch.	Regeln u. Wortvz. Kluge, Gesch. d. dtsch. Nat.-Lit.	Regeln u. Wortvz. Kluge, Gesch. d. dtsch. Nat.-Lit.	Regeln u. Wortvz. Kluge, Gesch. d. dtsch. Nat.-Lit	Regeln u. Wortvz.	Regeln u. Wortvz. Schwartz, Leitfd. Hopf u. Paulsiek, Lesebuch f. III.	Regeln u. Wortvz. Schwartz, Leitfd.	Regeln u. Wortvz. Schwartz, Leitfd. Hopf u. Paulsiek, Lesebuch f. IV.	Regeln u. Wortvz. Schwartz, Leitfd. Hopf u. Paulsiek, Lesebuch f. V.	Regeln u. Wortvz. Schwartz, Leitfd. Hopf u. Paulsiek, Lesebuch f. III.
3. Lateinisch.	Ellendt-Seyffert, Gramm. Süpfle, lat. Stilübungen, 3. Teil. Meissner, Synonym.	Ellendt-Seyffert, Gramm. Süpfle, lat. Stilübungen 3. Teil. Meissner, Synonym.	Ellendt-Seyffert, Gramm. Süpfle, lat. Stilübungen 2. Teil. Meissner, Synonym.	Ellendt-Seyffert, Gramm. Warschauer, Übungsbuch.	Ellendt-Seyffert, Gramm. Warschauer, Übungsbuch.	Ellendt-Seyffert, Gramm. Warschauer, Übungsbuch.	Ellendt-Seyffert, Gramm. Busch, Übungsbuch 1. Teil. Cornelius Nepos adauct. ed. Lattmann.	Ellendt-Seyffert, Gramm. Busch, Übungsbuch 2. Teil.	Ellendt-Seyffert, Gramm. Busch, Übungsbuch 3. Teil.
4. Griechisch.	Koch, Gramm.	Koch, Gramm. Nicolai, Mater.	Koch, Gramm. Nicolai, Mater.	Koch, Gramm. Nicolai, Mater.	Koch, Gramm. Wesener, Übungsbuch II.	Koch, Gramm. Wesener, Übungsbuch I.			
5. Französisch.	Lücking, Schulgramm.	Lücking, Schulgramm.	Lücking, Schulgramm.	Lücking, Schulgramm.	Lücking, Schulg. Lüdecking, Lesebuch 2. Teil.	Lücking, Schulg. Lüdecking, Lesebuch 1. Teil.	Plattner, Elementarbuch. Lüdecking, Lesebuch 1. Teil.	Plattner, Elementarbuch. Lüdecking, Lesebuch 1. Teil.	
6. Englisch.	Victor, Formenl. Petry, Syntax.	Victor, Formenl. Petry, Syntax.	Victor, Formenl. Petry, Syntax. Lüdecking, Lesebuch 1. Teil.	Victor, Formenl. Lüdecking, Lesebuch 1. Teil.					
7. Hebräisch.	Strack, Gramm. Genesis, ed. Baer et Delitzsch. Liber Psalmorum, ed. Theile.	Strack, Gramm. Genesis, ed. Baer et Delitzsch. Liber Psalmorum, ed. Theile.	Strack, Gramm. Genesis, ed. Baer et Delitzsch. Liber Psalmorum ed. Theile.						
8. Geschichte u. Erdkunde.	Herbst, Hilfsb. I. Seydlitz, kleine Schulgeogr. Kollhoff, Hamb. Geschichte.	Herbst, Hilfsb. I. Seydlitz, kleine Schulgeogr. Kollhoff, Hamb. Geschichte.	Herbst, Hilfsb. I. Seydlitz, kleine Schulgeogr. Kollhoff, Hamb. Geschichte.	Herbst, Hilfsb. I. Seydlitz. kleine Schulgeogr. Kollhoff, Hamb. Geschichte.	D. Müller, Leitf. d. deutsch. Gesch. Seydlitz, kleine Schulgeogr. Kollhoff, Hamb. Geschichte.	D. Müller, Leitf. d. deutsch. Gesch. Seydlitz, kleine Schulgeogr.	Jäger, Hilfsbuch. Seydlitz, kleine Schulgeogr.	Schoene, griech., röm., deutsche Sagen. Seydlitz, Grundzüge.	Seydlitz, Grundzüge.
9. Mathematik u. Rechnen.	Bardey, Aufg. Spieker, eb. Geom. August, Logthm.	Bardey, Aufg. Spieker, eb. Geom. August, Logthm.	Bardey, Aufg. Spieker, eb. Geom. August, Logthm.	Bardey, Aufg. Spieker, eb. Geom.	Bardey, Aufg. Spieker, eb. Geom.	Bardey, Aufg. Spieker, eb. Geom.	Spieker, eb. Geom.		
10. Physik.	Jochmann, Lehrb.	Jochmann, Lehrb.	Jochmann, Lehrb.	Jochmann, Lehrb.					
11. Naturkunde.					Baenitz, Lehrb. d. Botan. do. d. Zoolog.	Baenitz, Lehrb. d. Botan. do. d. Zoolog.	Baenitz, Lehrb. d. Botan. do. d. Zoolog.	Baenitz, Lehrb. d. Botan. do. d. Zoolog	Baenitz, Lehrb. d. Botan. do. d. Zoolog.

Außerdem Textausgaben der gelesenen Schriftsteller (ohne Anmerkungen), sowie die nötigen Wörterbücher und Atlanten. Empfohlen werden: Für das Lateinische die Wörterbücher von Heinichen, Georges, für das Griechische diejenigen von Benseler, Schenkl, für das Französische Sachs-Villatte (Schul-Ausgabe), für das Englische Thieme. An Atlanten werden empfohlen: Mittlerer Schulatlas von Debes (Unterklassen), Schulatlas von Debes, Kirchhoff und Kropatscheck, Adami-Kiepert (Mittel- und Oberklassen), Atlas antiquus von Kiepert, sowie ein historischer Atlas (Wolf).

Allgemeine Bemerkungen: 1. Sämtliche Bücher müssen gebunden und mit Calicodecke versehen sein. — 2. Wegen der notwendigen Wiederholungen sind die Schüler verpflichtet die Bücher der früheren Klassenkurse aufzubewahren, nötigenfalls zu diesem Zwecke je nach Bestimmung der Schule anzuschaffen. — 3. Zerrissene oder arg beschmutzte, desgl. beschriebene Exemplare werden nicht geduldet. — 4. Alle Schulhefte müssen mit vorschriftmässigem Umschlag und mit Schild versehen sein. — (In controlierter Beschaffenheit u. A. bei A. H. Behrendt Wwe., Poolstrasse 16).

4 b. Verteilung der L

Name:	Ordinarius:	I a O	I a M	I b O	I b M	II a O	II a M	II[b] O	
1. *Pauli*	—								
2. *Bintz*	O I a	3 Gesch. 2 Griech.	2 Lat.		2 Lat.				
3. *Reinstorff*	—			6 Griech.	6 Griech	2 Lat.			2
4. *Barthold*	—								
5. *Jacoby*	O I b	8 Lat.		8 Lat. 3 Deutsch					
6. *Schader*	—		4 Math. 2 Physik		4 Math. 2 Physik	4 Math. 2 Physik			
7. *Christensen*	O II a		4 Griech. 3 Gesch	3 Gesch.		6 Lat. 2 Deutsch			
8. *Rambeau*	—	2 Franz. 2 Engl.	2 Franz. 2 Engl.	2 Franz. 2 Engl.	2 Franz. 2 Engl.			2 Franz.	
9. *Goepel*	M I a	4 Griech. 3 Deutsch	6 Lat. 3 Deutsch 2 Griech.						
10. *Schnee*	M I b				6 Lat. 3 Deutsch	4 Griech.			
11. *Glänzer*	—	4 Math. 2 Physik		4 Math. 2 Physik					
12. *Dissel*	M II a					3 Gesch	6 Lat. 2 Deutsch		
13. *Augustin*	—								
14. *Klussmann*	M II b						3 Gesch.	5 Griech. 2 Religi	6 2
15. *Wilms*	O II b				3 Gesch.		4 Griech.	6 Lat. 3 Gesch. 2 Deutsch 2 Turn	
16. *Klamroth*	O III a	2 Hebräisch 2 Religion		2 Religion		2 Hebräisch 2 Religion			5
17. *Bromig*	O III b								
18. *Hansen*	O IV						2 Lat. 2 Griech.		
19. *Keferstein*	—						4 Math. 2 Physik	4 Math. 1 Physik	4 1
20. *Kümpel*	O V					2 Griech.			
21. *Kleinschmit*	M III a							2 Lat. 2 Griech.	3
22. *Weise*	M V								
23. *Böhme*	M III b								
24. *Brachmann*	M IV								2
25. *Bönsel*	—					2 Franz. 2 Engl.	2 Franz. 2 Engl.	2 Engl.	2
26. *Dettmer*	M VI								2
27. *Lieberg*	O VI								
28. *Wendt*	—	1 Vorturnen 2 Turnen 2 Zeichnen							
29. *Waldbach*	—	2 Männer-Chor				2 Turnen		1 Engerer	

3. Übersicht der im Schuljahre 1889/90 gebrauchten Lehrbücher.

Lehrgegenstand:	Oberprima	Unterprima	Obersekunda	Untersekunda	Obertertia	Untertertia	Quarta	Quinta	Sexta
1. Evang. Religionslehre.	Novum Testamentum (Graece ed. Buttmann). Schäfer, Lehrb. f. d. ev. Rel.-Unterr. 3 T. Ausg. B. Schulgesangb.	Novum Testamentum (Graece ed. Buttmann). Schäfer, Lehrb. f. d. ev. Rel.-Unterr. 3 T. Ausg. B. Schulgesangb.	Novum Testamentum (Graece ed. Buttmann). Neues Testam. Schäfer, Lehrb. f. d. ev. Rel.-Unterr. 3 T. Ausg. B. Schulgesangb.	Neues Testam. Schäfer, Lehrb. f. d. ev. Rel.-Unterr. 3 T. Ausg. B. Schulgesangb.	Neues Testam. Schäfer, Lehrb. f. d. ev. Rel.-Unterr. 3 T. Ausg. B. Schulgesangb.	Luth. kl. Katech. (Ges. d. Fr. d. vat. Erziehungsw.) Neues Testam. Schäfer f. Mittel- und Unterkl. Schulgesangb.	Luth. kl. Katech. (Ges. d. Fr. d. vat. Erziehungsw.) Schäfer f. Mittel- und Unterkl. Schulgesangb.	Luth. kl. Katech. (Ges. d. Fr. d. vat. Erziehungsw.) f. Schäfer, Lehrb. d. ev. Relig. 2. T. obere Stufe I. Schulgesangb.	Luth. kl. Katech. (Ges. d. Fr. d. vat. Erziehungsw.) Schäfer, Lehrb. f. d. ev. Relig. 2. T. obere Stufe I. Schulgesangb.
2. Deutsch.	Regeln u. Wortvz. Kluge, Gesch. d. dtsch. Nat.-Lit.	Regeln u. Wortvz. Kluge, Gesch. d. dtsch. Nat.-Lit.	Regeln u. Wortvz. Kluge, Gesch. d. dtsch. Nat.-Lit	Regeln u. Wortvz.	Regeln u. Wortvz. Schwartz, Leitfd. Hopf u. Paulsiek, Lesebuch f. III.	Regeln u. Wortvz. Schwartz, Leitfd.	Regeln u. Wortvz. Schwartz, Leitfd. Hopf u. Paulsiek, Lesebuch f. IV.	Regeln u. Wortvz. Schwartz, Leitfd. Hopf u. Paulsiek, Lesebuch f. V.	Regeln u. Wortvz. Schwartz, Leitfd. Hopf u. Paulsiek, Lesebuch f. III.
3. Lateinisch.	Ellendt-Seyffert, Gramm. Süpfle, lat. Stilübungen, 3. Teil. Meissner, Synonym.	Ellendt-Seyffert, Gramm. Süpfle, lat. Stilübungen 3. Teil. Meissner, Synonym.	Ellendt-Seyffert, Gramm. Süpfle, lat. Stilübungen 2. Teil. Meissner, Synonym.	Ellendt-Seyffert, Gramm. Warschauer, Übungsbuch.	Ellendt-Seyffert, Gramm. Warschauer, Übungsbuch.	Ellendt-Seyffert, Gramm. Warschauer, Übungsbuch.	Ellendt-Seyffert, Gramm. Busch, Übungsbuch 1. Teil. Cornelius Nepos adauct. ed. Lattmann.	Ellendt-Seyffert, Gramm. Busch, Übungsbuch 2. Teil.	Ellendt-Seyffert, Gramm. Busch, Übungsbuch 3. Teil.
4. Griechisch.	Koch, Gramm.	Koch, Gramm. Nicolai, Mater.	Koch, Gramm. Nicolai, Mater.	Koch, Gramm. Nicolai, Mater.	Koch, Gramm. Wesener, Übungsbuch II.	Koch, Gramm. Wesener, Übungsbuch I.			
5. Französisch.	Lücking, Schulgramm.	Lücking, Schulgramm.	Lücking, Schulgramm.	Lücking, Schulgramm.	Lücking, Schulg. Lüdecking, Lesebuch 2. Teil.	Lücking, Schulg. Lüdecking, Lesebuch 1. Teil.	Plattner, Elementarbuch. Lüdecking, Lesebuch 1. Teil.	Plattner, Elementarbuch. Lüdecking, Lesebuch 1. Teil.	
6. Englisch.	Victor, Formenl. Petry, Syntax.	Victor, Formenl. Petry, Syntax.	Victor, Formenl. Petry, Syntax. Lüdecking, Lesebuch 1. Teil.	Victor, Formenl. Lüdecking, Lesebuch 1. Teil.					
7. Hebräisch.	Strack, Gramm. Genesis, ed. Baer et Delitzsch. Liber Psalmorum, ed. Theile.	Strack, Gramm. Genesis, ed. Baer et Delitzsch. Liber Psalmorum, ed. Theile.	Strack, Gramm. Genesis, ed. Baer et Delitzsch. Liber Psalmorum, ed. Theile.						

4a. Verteilung der Lehrstunden in der ersten Hälfte des Winter-Halbjahres 1888/89.

Name:	Ordinarius:	I a O	I a M	I b O	I b M	II a O	II a M	II b O	II b M	III a O	III a M	III b O	III b M	IV O	IV M	V O	V M	VI O	VI M	Zus.	Bemerkungen
1. Pauli	O I a	2 Religion 3 Deutsch	2 Griech.		2 Lat.															9	
2. Reinstorff				6 Griech.	6 Griech.	2 Lat.			2 Lat.	2 Lat.										18	
3. Barthold	M I a	6 Griech. 3 Gesch.	3 Deutsch 8 Lat.																	20	
4. Jacoby	O I b	8 Lat.		3 Deutsch 8 Lat.																19	
5. Schader			4 Math. 2 Physik		4 Math. 2 Physik	4 Math. 2 Physik				3 Math.										21	Physik. Cabinet
6. Christensen			4 Griech. 3 Gesch.	3 Gesch.		2 Deutsch 6 Lat.														18	Bibliothek
7. Rambeau		2 Franz. 2 Engl.	2 Franz. 2 Engl.	2 Franz. 2 Engl.	2 Franz. 2 Engl.			2 Franz.							4 Franz.					22	
8. Schnee					3 Deutsch 6 Lat.	4 Griech.						7 Griech.								20	
9. Glänzer		4 Math. 2 Physik		4 Math. 2 Physik							3 Math.	3 Math.			4 Math. u. Rechn.					22	
10. Dissel	M II a					3 Gesch.	2 Deutsch 6 Lat.			7 Griech.			3 Gesch. u. Geogr.							21	Schüler-bibliothek
11. Augustin										2 Naturw.	2 Naturw.	2 Naturw.	2 Religion 2 Naturw.		2 Naturw.	2 Naturw.		8 Lat.		22	Naturgesch. Cabinet
12. Klussmann	M II b						3 Gesch.	5 Griech.	2 Deutsch 6 Lat.	2 Turnen									3 Geogr.	21	Karten-Sammlung
13. Wilms	O II b				3 Gesch.		4 Griech.	2 Religion 2 Deutsch 6 Lat. 3 Gesch. 2 Turnen												22	
14. Klamroth	O III a	2 Hebräisch		2 Religion		2 Religion 2 Hebräisch			5 Griech.	2 Religion 2 Deutsch 8 Lat.										23	
15. Bromig	O III b										7 Griech.	2 Deutsch. 8 Lat. 3 Griech. u. Geogr.								20	
16. Hansen	O IV						2 Lat. 2 Griech.							2 Religion 2 Deutsch 10 Lat. 4 Gesch. u. Geogr.						22	
17. Keferstein							4 Math. 2 Physik	3 Math. 2 Physik	3 Math. 2 Physik				3 Math.	2 Naturg.		3 Rechnen				24	
18. Kümpel	O V					riech.										2 Religion 2 Deutsch 8 Lat. 3 Gesch. u. Geogr.		3 Geogr.		20	
19. Kleinschmit	M III a							2 Lat. 2 Griech.	3 Gesch.		2 Religion 2 Deutsch 3 Gesch. 6 Lat.	2 Turnen								22	
20. Weise	M V											2 Religion	7 Griech.				2 Religion 2 Deutsch 8 Lat. 3 Geogr.			24	
21. Böhme	M III b												2 Deutsch 8 Lat.	4 Math. u. Rechn. 2 Turnen			3 Rechnen 2 Turnen			21	
22. Brachmann	M IV								2 Griech.	3 Gesch. u. Geogr.	2 Lat.				2 Deutsch 10 Lat. 4 Gesch. u. Geogr.					23	
23. Bönsel						2 Engl. 2 Franz.	2 Engl. 2 Franz.	2 Engl.	2 Engl.					4 Franz.		4 Franz.	4 Franz.			24	
24. Dettmer	M VI								2 Franz.	2 Franz.	2 Franz.	2 Franz.	2 Franz.						2 Religion 3 Deutsch 8 Lat.	23	
25. Lieberg	O VI													1 Schreib.	1 Schreib. 2 Religion	2 Schreib.	2 Schreib.	2 Religion 3 Deutsch 4 Rechnen 2 Naturg. 2 Schreib. 2 Zeichnen	2 Schreib. 2 Zeichnen	27	Schüler-bibliothek
26. Wendt		1 Vorturnen 2 Turnen 2 Zeichnen								2 Zeichnen	2 Zeichnen	2 Zeichnen	2 Zeichnen	2 Zeichn.	2 Zeichn. 2 Turnen	2 Zeichnen 3 Turnen	2 Zeichnen	2 Turnen		27	
27. Waldbach		1 Engerer Chor 2 Männerchor			2 Turnen					2 Singen				2 Singen		2 Singen	2 Singen 2 Naturg.	2 Singen	2 Singen 4 Rechnen 2 Naturg. 2 Turnen	27	

…ehrstunden seit dem 23. Januar 1889.

…	III a		III b		IV		V		VI		Zus.	Bemerkungen
M	O	M	O	M	O	M	O	M	O	M		
											9	
Lat.	2 Lat.										18	
											19	
	3 Math.										21	Physik. Cabinet
											18	Bibliothek
						4 Franz.					22	
											18	
			7 Griech.								20	
		3 Math.	3 Math.			4 Math.					22	
	7 Griech.			3 Gesch.							21	Schüler-Bibliothek
	2 Naturg	2 Naturg.	2 Naturg.	2 Religion 2 Naturg.		2 Naturg.	2 Naturg.		8 Lat.		22	Naturhistor. Sammlung
Lat. Deutsch	2 Turnen									3 Geogr.	21	Karten-Sammlung
…ion											22	
…en												
Griech.	6 Lat. 2 Deutsch										23	
		7 Griech.	8 Lat. 3 Gesch. u. Geogr. 2 Deutsch								20	
					2 Religion 10 Lat. 2 Deutsch 4 Gesch. u. Geogr.						22	
Math. Physik				3 Math.	2 Naturg.		3 Rechnen				24	
							8 Lat. 2 Religion 3 Geogr. u. Gesch. 2 Deutsch		3 Geogr.		20	
Gesch.		2 Religion 6 Lat. 2 Deutsch 3 Gesch. u. Geogr.	2 Turnen								22	
			2 Religion	7 Griech.				8 Lat. 2 Deutsch 3 Geogr. 2 Religion			24	
				2 Deutsch 8 Lat.	4 Math. u. Rechnen 2 Turnen			3 Rechnen 2 Turnen			21	
Griech.	2 Religion 3 Gesch.	2 Lat.				10 Lat. 2 Deutsch 4 Gesch. u. Geogr.					25	
Engl.					4 Franz.		4 Franz.	4 Franz.			24	
Franz.	2 Franz.	2 Franz.	2 Franz.	2 Franz.						2 Religion 8 Lat. 3 Deutsch	23	
					1 Schreib.	1 Schreib. 2 Religion	2 Schreib.	2 Schreib.	4 Rechnen 2 Schreib. 3 Deutsch 2 Naturg. 2 Zeichnen 2 Religion	2 Schreib. 2 Zeichnen	27	Schüler-Bibliothek
	2 Zeichnen	2 Zeichnen	2 Zeichnen	2 Zeichnen	2 Zeichnen	2 Zeichnen 2 Turnen	2 Zeichnen 2 Turnen	2 Zeichnen	2 Turnen		27	
Chor	2 Singen				2 Singen		2 Singen	2 Singen 2 Naturg.	2 Singen	2 Singen 2 Turnen 4 Rechnen 2 Naturg.	27	

Schüler verpflichtet die Bücher der früheren Klassenkurse aufzubewahren, nötigenfalls zu diesem Zwecke je nach Bestimmung der Schule anzuschaffen. — 3. Zerrissene oder arg beschmutzte, desgl. beschriebene Exemplare werden nicht geduldet. — 4. Alle Schulhefte müssen mit vorschriftmässigem Umschlag und mit Schild versehen sein. — (In controlierter Beschaffenheit u. A. bei A. H. Behrendt Wwe., Poolstrasse 16).

5. Die Aufgaben

zu den in den oberen Klassen angefertigten Aufsätzen waren folgende:

a. Deutsch:

O I a. 1) Inwiefern ist der zweite punische Krieg der größte, den Rom je geführt hat. — 2) Inwiefern haben die inneren Unruhen Roms zur Erweiterung und Befestigung der äußeren Macht gedient. — 3) Der Einfluß des Straßburger Aufenthalts auf den jungen Goethe. — 4) Worin zeigt sich die Größe der Römer nach der Schlacht bei Cannae? — 5) Ein frei gewähltes Thema. — 6) Inwiefern ist Schillers „Braut von Messina" dem „König Ödipus" des Sophokles nachgearbeitet. — 7) Arbeit ist des Blutes Balsam, Arbeit ist der Tugend Quell.

M I a. 1) Schilderung der Urzustände Deutschlands nach Tacitus Germania. — 2) Warum haben die Deutschen den Rhein so lieb? — 3) Welche Idee verherrlicht Goethe in seinem Goetz von Berlichingen? — 4) Finden die von Lessing im Laokoon aufgestellten Grundsätze in Schillers Romanzen ihre Bestätigung. —

O I b. 1) Ist die Erzählung des Menenius Agrippa eine Fabel im Sinne Lessings? — 2) Worin besteht die Schuld der Emilia Galotti? — 3) Die Fabel im Kaufmann von Venedig (Eine Erzählung). — 4) Welches sind die Gründe für die Verurteilung des Sokrates. — 5) Wie zeichnet Herder im Cid den spanischen Nationalhelden? — 6) Die Vorfabel zu Lessings Nathan dem Weisen. — 7) Der geschichtliche Egmont, Schillers und Goethes Egmont (Ein Vergleich). — 8) Vergleichung des König Ödipus von Sophokles und der Braut von Messina.

M I b. 1) Über das Wesen der Fabel nach Lessing und Grimm. — 2) Wie verhalten sich Hagen und Rüdiger den Racheplänen ihrer Herrinnen gegenüber? — 3) Es soll der Sänger mit dem König gehen, — sie beide stehen auf der Menschheit Höh'n! — 4) Inwiefern zeigt sich Walther von der Vogelweide in seinen Sprüchen als deutscher Patriot? — 5) Gilt das Horazische Wort: „Nil mortalibus ardui est" auch von der Jetztzeit?

O II a. 1) Welche Gründe bewirkten die gänzliche Unterwerfung der Athener durch König Philipp von Makedonien? — 2) Die Bürgschaft von Schiller. — 3) Die Kulturentwickelung der Menschen durch den Ackerbau (Im Anschluß an Schiller „Das Eleusische Fest"). — 4) Welche Gründe bewirkten es, daß die Römer im zweiten punischen Kriege Sieger blieben? — 5) Von der Stirne heiß Rinnen muß der Schweiß, Soll das Werk den Meister loben. — 6) Inwiefern und aus welchen Gründen ist Schiller in der „Maria Stuart" von der geschichtlichen Wahrheit abgewichen? — 7) Der Zustand Frankreichs vor dem Auftreten der Jungfrau von Orleans (Nach Schillers „Jungfrau von Orleans"). — 8) Hat Cicero in der für den Manilischen Gesetzesvorschlag gehaltenen Rede die Gründe der Gegner widerlegt? — 9) Klassenaufsatz.

M II a. 1) Was ist von dem Gebrauch der Fremdwörter zu halten. — 2) Der Wirt zum goldenen Löwen. — 3) Übersetzung eines Abschnitts aus Homers Odyssee in die moderne Nibelungenstrophe (Hermes kommt zu Kalypso). — 4) Klassenarbeit. — 5) Welche Züge aus seinem Leben hat Goethe in sein Gedicht „Hermann und Dorothea" verwoben?

b. Lateinisch:

O I a. 1) Quos potissimum Graecorum poetas Horatius imitandos sibi proposuerit. — 2) De rerum in Britannia inde a Caesare usque ad Agricolam gestarum eventu. — 3) Quid Horatius de aetatis suae moribus iudicaverit. — 4) Roma quid debeat Scipionibus narratur. — 5) Gravem in Romanos testem fuisse Mithridatem. — 6) Ciceronis illud: maximam partem ad iniuriam faciendam aggrediuntur, ut adipiscantur ea, quae concupiverunt, in Romanos quoque valere. — 7) Propositis ad imitandum vitis Corn. Nepotis Titus Atius Labienus exprimitur. — 8) Unius viri virtute non semel nisam esse rei publicae Romanae salutem.

M I a. 1) Quibus rebus floruerit res publica Romanorum, quibus vitiis conciderit, ex Sallusti libro, quem de bello Catilinae scripsit, explicetur. — 2) Pugnam Pharsalicam qualem Caesar descripserit. — 3) Invidiam gloriae esse comitem clarissimis comprobetur et Atheniensium et Romanorum exemplis. — 4) Fortuna plerumque eos quos plurimis beneficiis ornavit ad duriorem casum reservat.

O I b. 1) Hannibal cur terrestri itinere Italiam petere maluerit. — 2) De vita, studiis rebusque Tiberii et Gai Gracchorum. — 3) Theseum illud, quod exstat Athenis, esse maximarum rerum memorabile monumentum. — 4) Qua ratione Vercingetorix bellum gesserit. — 5) Roma quid debeat Scipionibus narratur. — 6) Optimo cuique Atheniensium accidere solebat, ut in exsilium eiceretur. — 7) De origine, situ, moribus ac populis Thraciae. — 8) Magnam Thebanorum, maiorem Lacedaemoniorum, maximam esse Atheniensium gloriam.

M I b. 1) Quid Caesar de Germania tradiderit. — 2) Qu. Fabio Maximo quid debeat Roma. — 3) Quam mutabilis sit aura popularis exemplis illustretur. — 4) De P. Clodii Pulchri vita et morte.

O II a. 1) De Zopyro. — 2) Quomodo Pompeius bellum praedonum confecerit. — 3) Ciceronis illud Romanos in bello utilitati paruisse, exemplis belli Punici secundi memoria probetur. — 4) Klassenaufsatz.

M II a. 1) Quomodo Saguntum ceperit Hannibal. — 2) De pugna Alliensi.

6. Unterricht im Hebräischen, Zeichnen, Singen und Turnen.

1. Der hebräische Unterricht wurde von Dr. *Klamroth* in zwei Abteilungen erteilt. In der ersten Abteilung, in welcher zwei Jahrgänge (I a und I b) combinirt waren, wurden die wichtigsten Erscheinungen der Syntax durchgenommen, die Formenlehre wiederholt und Genesis cap. 1—9, sowie Sam. I cap. 1—18 gelesen. In der zweiten Abteilung (II a) wurden die Anfangsgründe bis zum regelmäßigen Verbum einschließlich eingeübt. In beiden Abteilungen wurden auch schriftliche Klassenarbeiten angefertigt, in der ersten Übersetzungen aus dem hebräischen Bibeltexte mit Analyse, in der zweiten Formenextemporalien und Übersetzungen in's Hebräische nach Stracks Chrestomathie. — Mit dem Beginne des neuen Schuljahres wird eine dritte Abteilung (O II a und M II a) eingerichtet, so dass auch in diesem Lehrgegenstande die bisher durch die Umstände gebotenen Combinationen in Fortfall kommen.

2. Für den Zeichen-Unterricht lag folgender Lehrplan zu Grunde:

Sexta: Die gerade Linie in verschiedenen Lagen; Teilungen von Linien und Winkeln; geradlinig begrenzte Flachornamente.

Quinta: Ebene Gebilde mit geraden und kreisförmigen Linien; die Ellipse, das Oval, die Wellenlinie, die Spirale, die Schneckenlinie und deren Anwendung im Flachornament.

Quarta: Zeichnen nach Flachmodellen, Flachornamente verschiedener Stilarten in farbiger Wiedergabe; das Notwendigste über die Farbenharmonie.

Untertertia: Zeichnen nach Holzmodellen in verschiedenen Stellungen unter Erklärung und Einprägung der Grundsätze der Centralperspektive.

Obertertia: Zeichnen nach Modellen von Geräten, Geländer, Wagen, Schiffen u. s. w. Schattieren nach Gipsmodellen in Blei, Kreide und Tusche.

Untersekunda bis Prima: Schwierigere Gipsmodelle in mannigfacher Ausführung; landschaftliches Zeichnen nach Vorlagen; Lavieren und Aquarellieren; Malen nach Pflanzen mit Deckfarben; Anleitung zum Skizzieren nach der Natur; Modellieren; Projektionslehre.

An dem nichtverbindlichen Unterrichte der Oberklassen nahmen im Sommer-Halbjahre 29, im Winter-Halbjahre 14 Schüler teil.

Die Verwaltung des Zoologischen Gartens erwarb sich den Dank der Anstalt durch die Erlaubniß, daß die Schüler der oberen Klassen unter Anleitung landschaftliche Skizzen in dem Garten aufnehmen durften.

3. Der Gesang-Unterricht wurde in 8 Abteilungen erteilt; außerdem vereinigten sich die besseren Sänger der Abteilungen 1, 3 und 4 wöchentlich einmal zu einer gemeinschaftlichen Chorstunde (engerer Chor).

In der 1. Abteilung (I a—II b) wurden Männerchöre von Tschirch, Bruch, Mendelssohn und anderen eingeübt, zugleich aber auch Einzelübungen der Tenor- und Baßstimmen für den gemischten Chor vorgenommen.

Die 2. Abteilung (I a—II b) ist die Vorbereitungsstufe für Abteilung 1, es wurden daher meistens Stimmübungen angestellt. In Abteilung 3 und 4 (III, IV) wurden in erster Reihe die Oberstimmen der bei Schulfeierlichkeiten vorzutragenden geistlichen und weltlichen Lieder eingeübt, nebenbei auch Choräle und Volkslieder. Einstudiert wurden unter andern der 100. Psalm von Breitenbach, Herr bleib bei uns von Kuntze, Macte imperator von Sachner.

In den Abteilungen 5—8 (V. und VI.) wurden ausschließlich Choräle, Volkslieder und Übungen gesungen.

4. Der Turn-Unterricht wurde in 11 Abteilungen erteilt.

Die Frei- und Gerätübungen entwickelten sich nach einem entworfenen Übungsplane. Während des Sommers wurden statt des Turnens zuweilen auch Spiele auf der Moorweide gestattet.

7. Vermehrung der Lehrmittel.

1. Für die Schulbibliothek (Verwalter: Prof. Dr. Christensen) wurden aus eigenen Mitteln angeschafft:

a. Zeitschriften:

Zeitschr. f. mathem. u. naturw. Unterr. Herausg. v. J. C. V. Hoffmann. 19. Jahrg. 1888. — *Prakt. Physik.* 1. Jahrg. 1888. — *Gaea.* Bd. 24. 1888. — *Revue üb. d. Fortschr. d. Naturw.* N. F. 8. Jahrg. 1888. — *Histor. Zeitschr.* N. F. Bd. 23, 24. 1888. — *Centralblatt f. d. ges. Unterrichtsverw. in Preussen.* 1888. — *Monatsschr. f. d. Turnwesen.* 7. Jahrg. 1888. — *Jahresber. üb. d. Fortschr. d. klass. Altertumswiss.* N. F. 7. Jahrg. 1888. — *Zeitschr. f. d. Gymnasialwesen.* N. F. 22. Jahrg. 1888. — *Wochenschr. f. Klass. Philol.* 6. Jahrg. 1888. — *Neue Jahrbb. f. Philol. u. Pädagog.* 1888. — *Zeitschr. f. neufr. Spr. u. Litt.* X. — *Engl. Studien.* XI. — *Zeitschr. f. deutsch. Altertum.* N. F. Bd. 20. — *Jahresber. üb. d. Erscheinungen a. d. Gebiete der german. Philol.* — *Deutsche Litteraturzeitg.* 9. Jahrg. 1888. — *Literar. Centralblatt.* 1888. —

b. Fortsetzungen:

Berghaus, Physikal. Atlas. Lfg. 15—17. — *Geogr. Jahrbuch.* XII. — *Oncken, W.* Allg. Gesch. in Einzeldarstellungen. Lfg. 145—154. — *Ranke, L. v.* Weltgesch. Bd. 9. — *Monumm. Germ.* hist. Legg. sect. I. t. V, 1; Diplomm. regg. et imperr. G. II, 1. — *Giesebrecht, W. v.* Gesch. d. deutsch. Kaiserzeit V, 2. — *Gesch. d. deutsch. Kunst.* Lfg. 22—28. — *Jahresber. üb. d. höh. Schulwesen.* II. 1888. — *Pädagog. Jahresber.* 1888. — *Verhandlungen der Direktoren-Vers. in Preussen.* Bd. 20—30. — *Hottenroth, E.* Trachten. Lfg. 16, 17. — *Roscher, H.* Ausführl. Lexik. d. griech. u. röm. Mytholog. Lfg. 13. — *Handb. d. Klass. Altertumswiss.* Halbbd. 9—13. — *Mommsen, Th.* Röm. Staatsrecht III, 2. — *Krebs, Ph.* Antibarbar. d. lat. Spr. Lfg. 9, 10. — Forcellini, Lex. tot. lat. Lfg. 32. 33. —

c. Neue Erwerbungen:

Durège, H. Theorie d. ellipt. Functionen. Lpz. 87. — *Dur.* Elemente d. Theorie d. Functionen einer completen veränderl. Grösse. Lpz. 82. — *Dur.* D. ebenen Curven 3. Ordnung. Lpz. 71. — *Clausius, R. D.* Potentialfunction u. d. Potential. Lpz. 85. — *Briot et Bouquet.* Leçons de géom. analyt. Paris 87. — *Dirichlet, P.* Vorlesungen üb. Zahlentheorie. Herausg. v. R. Dedekind. 3. A. — *Harnack. A.* Grundlagen d. Theorie des logarithm. Potentials. Lpz. 87. — *Hattendorf, K.* Einleitung in d. höh. Analysis. N. A. Dresden 83. — *Riemann, B.* Partielle Differentialgleichung. Brschwg. 82. — *Schubert, H.* System der Arithmet. u. Algebra. Potsdam 85. — *Kleyer, A.* Lehrb. d. ebenen Trigonometrie. Stuttg. 88. — *Clausius, R. D.* Mechan. Wärmetheorie. Brschwg. 77. 79. — *Falb, R.* V. d. Umwälzungen im Weltall. Wien 87. — *Hofmeister, R.* Leitfaden d. Physik. Zürich 84. — *Kirchhoff, G.* Vorlesungen üb. mathem. Phys. Mechanik. Lpz. 83. — *Neumann, F.* Einleitung in d. theoret. Physik. Lpz. 83. — *Thompson, S.* Vorlesungen üb. Elektrizität u. Magnetismus. Deutsche Ausg. Tübingen 87. — *Helmholtz, H. v.* Handbuch d. physiol. Optik. Lfg. 1—4. — *Schellbach, K.* Neue Elemente d. Mechanik. Berl. 60. — *Krumme, W.* Lehrb. d. Physik. Berl. 85. — *Duhamel.* Lehrb. d. analyt. Mechanik. Lpz. 61. — *Knuth, P.* Flora d. Prov. Schlesw.-Holst. Lpz. 88. — *Götz, W.* D. Verkehrswege im Dienste des Welthandels. Stuttg. 88. — *Jäger, O.* Gesch. d. neuesten Zeit. 3 Bde. Berlin 88. — *Melle, W. v.* G. H. Kirchenpauer. Hbg. 88. — *Beneke, O.* Von unehrl. Leuten. Berl. 89. — *Eckstein, F. A.* Lat. und griech. Unterricht. Lpz. 87. — *Laas, E.* D. deutsche Unterricht. Lpz. 87. — *Ders.* Der deutsche Aufsatz. Lpz. 77—78. — *Schmidt, K. A.* Encyklopädie des ges. Erziehungs- und Unterrichtswesens. 10 Bde. Gotha 75—88. — *Monumenta Germ. paedagogica* 1. 2. — *Hagenbach, K.* Kirchengesch. 7 Bde. Lpz. 75—86. — *Meyer, A.* Krit. exeget. Kommentar z. N. T. Bd. 1, 1. 2—7. 15. — *Riehm, E.* Handwörterbuch des bibl. Altertums. 2 Bde. Bielefeld 84. — *Sophokles' Tragg.* Übers. v. G. Wendt. 2 Bde. Stuttg. 84. — *Pauly, A.* Realencyklopädie des klass. Altertums. 8 Bde. Stuttg. 42—52. — *Suidae lexicon Rec.* G. Bernhardy. 2 Bde. Halle 43—53. — *Seelmann, E.* D. Aussprache des Lat. Heilbronn 85. — *Lexicon Homeric.* Ed. H. Ebeling. 3 Bde. — *Helbig, W.* D. Homer. Epos a. d. Denkmälern erläutert. 2 A. Lpz. 87. — *Volkmann, E.* D. Rhetorik d. Griech. u. Römer. 2 A. Lpz. 85. — *Georges, K.* Lex. d. lat. Wortformen. Lfg. 1. Lpz. 88. — *Bulthaupt.* Dramaturgie d. Klassiker. 2. A. 2 Bde. Oldenbg. 83. — *Deutscher Litteraturkalender f. 1888.* — *Rückert's* Poet. Tagebuch. Frankf. a./M. 88. — *Grabow, H.* D. Lieder aller Völker u. Zeiten. Hbg. 88. — *Grimm, J.*

Gesch. d. deutsch. Sprache 1. 2. Lpz. 80. — *Scherer, W.* Poetik. Berl. 88. — *Herder, J. G.* Sämmtl. Werke. Herausg. v. Suphan. Bd. 1—4. 6. 7. 10—13. 16—28. — *Elze, K.* Grundriss der engl. Philol. 2. A. Halle 89. — *Hoppe. A.* Engl.-deutsch. Supplement-Lexik. 1. Abtlg. Berl. 88. — *Murray, J.* A new engl. Dictionary. I—IV, 1—2. Oxford 84—88. — *Gröber, G.* Grundriss d. roman. Philol. 1. Bd. Strassbg. 88.

Von der Bibl. der Gelehrtenschule des Johanneums wurden überwiesen (Doubletten):

Xenoph. Anab. M. erkl. Anm. v. K. W. Krüger. Berl. 54. — *Classen, J.* B. G. Niebuhr. Gotha 75. — *Varro, de lingua lat.* Em. C. O. Müller. Lpz. 33. — *G. J. Voss.* De histt. Graecis libri IV. Lugd. Batav. 1651. — Dasselbe. Ed. A. Westermann. Lpz. 38. — *Elementa logices Aristotel.* Illustr. A. Trendelenburg. Berl. 35. — *Ribbeck, O.* Beitrr. z. Lehre v. d. lat. Partikeln. Lpz. 69. — *D. Schriften des Alt. Test.* Neu übers. v. J. Augustin u. L. de Wette. 3. Bd. Heidelbg. 1809. — *de Wette, L.* Comment. üb. d. Psalmen. Heidelberg 1811. — *Steup, J.* Quaestt. Thucyd. Bonn 68. — *Gesenius, W.* Hebr. Lesebuch. Halle 23. — *Verhandlungen* der 28. Vers. deutsch. Philoll. u. Schulmänner. Lpz. 73. — *Stenographische Berichte* üb. die Verhandlungen d. deutsch. constituirenden Versammlg. Frkf. a./M. 48. 49. —

Geschenkt wurden:

Von der Oberschulbehörde: Jahrb. d. Hambg. Wissenschaftl. Anstalten. Jahrg. V 1888. — *Von der Zool. Gesellschaft: D. Zool. Garten.* Jahrg. XXIX. — *Von Frau Capit. Voss: Rotteck, K. v.* Allgem. Gesch. 9 Bde. Freibg. 32. — *Münch, E.* Karl v. Rotteck. Haag 31. — *Von Herrn Dr. Klamroth: Klamroth, M.* Üb. d. Auszüge aus griech. Schriftstellern bei al Jaʿ qûbi (S. A.) — *Calvini, Joa.* Institut. christ. relig. Ed. A. Tholuck. Berl. 34. 35. — *Ders.* In Nov. Test. commentarr. Ed. A. Tholuck. 3 Bde. Berl. 34. 35. — *Olshausen, H.* Bibl. Commentar üb. sämmtl. Schriften des N. T. — *Melanchthon, Ph.* Opp. omnia vol. 1. Erlangen 28. — *Baumgarten-Crusius, D.* Lehrb. d. christl. Dogmengesch. Jena 32. — *Ders.* Comment. üb. d. Evang. d. Matth. Jena 44. — *Ders.* Comment. üb. d. Brief Pauli a. d. Römer. Jena 44. — *Ders.* Comment. üd. b. Briefe Pauli an d. Ephes. u. Kor. Jena 47. — *Tholuck,* A. Comment. z. Evang. Joh. 5. A. Hbg. 37. —

2. An Geschenken erhielt die Schülerbibliothek (Verwalter Oberlehrer Dr. Dissel):

Von *Solmitz* (M II A): David Müller, Gesch. d. deutschen Volkes. — *Brieger* (I b): Holub, 7 Jahre in Südafrika. 2 Bd. — *Nordheim* (M II A): Rohlfs u. Cameron, Quer durch Africa. Boeck, Kaiser Wilhelm. Zöllner, der schwarze Erdtheil. K. F. Becker, Erzählungen aus der alten Welt. Armand Landrie, Les monstres marins. Livingstones Reisen im Innern von Afrika. Lanoye, La Schérie und Voyage dans les glaces. Brendel, Erzählungen aus dem Leben der Tiere. Reise um die Erde in 80 Tagen. — *Fürstenberg* (II b): Karl Müller, Heimkehr des jungen Canaèros. Decken-Plieninger, Vom schwarzen Continente. — *Philipson* (M II A): Hoffmann, Die Büffeljäger am Lagerfeuer. — *Owert* (M III b): G. Weber, Germanien in den ersten Jahrhunderten seines geschichtlichen Lebens. — *Fürstenberg* (M II B): Lewes Goethes Leben. — *Iklé* (M I b): Eine grössere Anzahl Jugendschriften.

Neu angeschafft wurden für die Schülerbibliothek:

Tschudi, Thierleben der Alpenwelt. — Walther von der Vogelweide, Gedichte. — Hasnis, die Thierwelt. — Pauli, Bilder aus Altengland. — Diaz del Castillo, Eroberung von Mexico. — Jäger, Geschichte der Griechen. — Menge, Einführung in die antike Kunst. — Vilmar, Literaturgeschichte. — Palleske, Schiller. — Volz, Amerika. — Volz, Europa. — Bergk, griech. Literaturg. IV. — Eichendorf, aus dem Leben eines Taugenichts. — Simons, Aus altröm. Zeit. — Keck, Über das Tragische. — Gotthelf, Uli, der Knecht. — Gotthelf, Uli, der Pächter. — Rollenhagen, Froschmäuselcr. — Preller, Odysseelandschaften. — Hans Sachs, Dichtungen. — Schwab, Deutsche Prosa. — Viehoff, Goethes Gedichte. — Woltmann, Aus vier Jahrhunderten niederl. u. deutscher Kunstgeschichte. — Scheffel, Iuniperus. — Rich, Wörterbuch der röm. Altertümer. — Flaxman, Umrisse zu Homers Ilias und Odyssee. — Peter, Römische Geschichte. — Köchly, akad. Vorträge und Reden. 2 Bde. — Jordan, Nibelungenlied. — Scheffel, Trompeter von Säckingen. — Linnig, Bilder zur Geschichte der deutschen Sprache. — Geibel, Brunhild. — Schmelzer, Erzählungen aus dem Altertum. — Büchmann, Geflügelte Worte. — Herbst, Historisches Quellenbuch I., II. — Boissier, Cicero und seine Freunde. — Gregorovius, Euphorion. — Hebel, Allemannische Gedichte. — Koppmann, Aus Hamburgs Vergangenheit. —

Friedländer, Sittengeschichte Roms. — Barthel, Vorlesungen über deutsche Literaturgeschichte. — Brentano, Chronika eines fahrenden Schülers. — Briefwechsel zwischen Schiller und W. v. Humboldt. — Dahn, Walhall. — Detto, Horaz und seine Zeit. — Erdmann, Ernste Spiele. — Freitag, Die Ahnen. — Freitag, Bilder aus der deutschen Vergangenheit. — Humboldt, Ästhetische Versuche zu Hermann und Dorothea. — Mommsen, römische Geschichte 1—3, 5.

3. Das physikalische Kabinet (Verwalter: Prof. Dr. Schader) ist in diesem Jahre vermehrt worden, soweit die regelmässigen Mittel reichten.

4. Die Naturgeschichtliche Sammlung. (Verwalter: Oberlehrer Dr. Augustin).

Angeschafft: Hoffmann: Die europäischen Großschmetterlinge, Petrefakten-Sammlung, bezogen von Dr. Riemann-Görlitz.

Geschenkt wurden:

Durch Herrn *Direktor Dr. Bolau:* Bärenkopf, Wiskatscha, Karettschildkröte, Chamäleon, Katzenhai, Vogelspinne; von Herrn *Prof. Dr. Jacoby:* Bergkrystall vom Gauli-Gletscher; von Frau *Müller*, durch Herrn *Dr. Klamroth:* Fossile Haifischzähne, 3 Löffel aus Caracas; von Herrn *Wentscher:* Mineralien aus Kalifornien; von den Sekundanern *Derenberg:* Meeraal, Garnelen; *Haller:* Schwanenei; *Kröhnke:* Mineralien; *Schultz:* weisse Goldammer; von den Tertianern *Classen:* Sepiaknochen; *Dahlström:* Meteorstein; *Engel:* Fossile Seeigel; *Evers:* 2 Kolibri; *Genthe:* Mineralien und Petrefakten; *Hane:* Belemniten; *Jenquel:* gr. Eisfalter; *Meinhold:* Konchylien; *Schneider:* Straussfeder, 2 Buprestiden aus Brasilien, Krystallgyps; *Schönewald:* Steinnuss; *Schultz:* glatte Natter, Kohlenkalkstein mit Fischabdruck; *Schütt:* 30 Moschusböcke; *Seligmann:* Grünknochen, Tintenfisch, vulkanischer Sand; *Thormählen:* 4 Gläser mit afrikanischen Schlangen aus Kamerun; von den Quartanern *Behnke:* Reisähren; *Götte:* Konchylien aus Singapore, *Götz:* Kolibri; *Kelting:* Zuckerrohr; von den Quintanern *Augustin:* Goldschleihe; *Bennaton:* Kasten mit südamerikanischen Schmetterlingen; *Goldenberg:* Nummulitenkalk; *Götte:* 2 Buprestiden aus Assam; *Gumprich:* Dornstein aus Oynhausen; *Jebens:* Achat; von den Sextanern *Kaempf:* Schwefelkies; *Solmitz:* Fossile Spongien; *Sonnenkalb:* Blaumeise.

5. Die Sammlung der Unterrichtsmittel für den geographischen und geschichtlichen Unterricht (Verwalter: Oberlehrer Dr. Klussmann) wurde vergrössert durch folgende Erwerbungen:

Kiepert: Karte von Asia Minor. — *Kiepert:* Karte von Altlatium. — *v. Kampen:* Karte des Imperium Romanum. — *Kiepert:* physikalische Karte von Deutschland. — *Kiepert:* Karte von Spanien—Portugal. — *Kiepert:* Karte von Östreich—Ungarn. — *v. Hochstetter:* 30 geologische Bilder der Vorwelt und der Jetztwelt, neue Ausgabe (Esslingen. Schreiber). — *Fraas:* 5 Wandtafeln für Geologie und Praehistorie. (Aufl. 2. Stuttgart. Ulmer). — *Synchronistische Geschichtstabelle mit Bildern* (Geschenk des Herrn K. Wentscher).

Die Direktion des Botanischen Gartens versah auch im verflossenen Sommer wie in den Vorjahren unsere Anstalt dreimal wöchentlich mit Exemplaren frischer Pflanzen für den Unterricht in Botanik.

Für alle diese freundlichen Zuwendungen und Geschenke, ebenso für die in ihnen sich aussprechende Gesinnung verfehle ich nicht namens der Anstalt herzlich zu danken.

IV. Stiftungen.

1. Die Witwen- und Waisen-Kasse.

Die Witwen- und Waisen-Kasse des Wilhelm-Gymnasiums zählt gegenwärtig 18 Mitglieder. Der Vorstand setzt sich z. Z. folgendermaßen zusammen: Vorsitzender: der Direktor; Rechnungsführer: Oberlehrer Dr. *Glänzer;* Schriftführer: Oberlehrer Dr. *Augustin.* Am 31. Dezember 1887 betrug das Vermögen der Kasse ℳ 2481,49. Für das abgelaufene Jahr 1888 stellten sich die Einnahmen folgendermaßen:

1.	Eintrittsgelder	ℳ 40,54
2.	Beiträge	„ 325,—
3.	Geschenke	„ 8,50
4.	Zinsen	„ 79,69
5.	Verschiedenes	„ 18,90
		ℳ 472,63

Die Ausgaben betrugen ℳ 70,— (Witwengelder), der Kassenbestand ist demnach ultimo Dezember 1888 ℳ 2884,12. Diese Gelder sind bei der neuen Sparkasse in Hamburg belegt. Für die Geschenke wird den Gebern auch an dieser Stelle herzlicher Dank gesagt.

---

2. Von den ℳ 1070, die im vergangenen Jahre dem damit begründeten **Stipendienfonds** [1]) übergeben wurden, sind schon Ostern 1888 je ℳ 100 zur Verteilung an zwei Abiturienten abgelöst worden. Der Grundstock des Kapitals besteht nunmehr aus nominell ℳ 900, angelegt in preußischen Consols. Vergrößert hat sich diese Summe im vergangenen Jahre leider nicht. Der neuerdings erst gewählte Vorstand besteht außer dem Unterzeichneten aus den Herren Dr. *Wilms* und Dr. *Keferstein.*

---

[1]) Derselbe verdankt einer am 18. Februar 1888 von Herrn Oberlehrer Dr. *Wilms* veranstalteten Schüleraufführung seinen Ursprung (Vergl. den letzten Jahresbericht, Seite 4).

V. Schulfeier. — Wechsel des Schuljahres.

Freitag, den 22. März, Vormittags 11 Uhr:

Gedenkfeier

an

Kaiser Wilhelm I

verbunden mit der

Entlassung der Abiturienten

und dem

Schlusse des Schuljahres.

Die Ansprache wird der unterzeichnete stellvertretende Direktor halten.

Darauf — nicht öffentlich — Versetzung der Schüler.

Sonnabend, den 23. März, morgens 9 Uhr,
findet die Prüfung der zur Aufnahme angemeldeten Schüler statt. Dieselben haben Schreibsachen und die Abgangs-Zeugnisse von den zuletzt besuchten Schulen mitzubringen.

Der Unterricht des Sommer-Halbjahres beginnt

Montag, den 25. März, morgens 9 Uhr.

VI. Mitteilung an die Eltern unserer Schüler.

1. Nach den Bestimmungen des Reichs-Impfgesetzes vom 8. April 1874 sind im laufenden Jahre alle diejenigen Schüler der Wiederimpfung zu unterziehen, welche im Jahre 1877 geboren sind, sofern dieselben nicht nach ärztlichen Zeugnissen in den letzten 5 Jahren, also 1884—1888, die natürlichen Blattern überstanden haben oder mit Erfolg geimpft sind. Ebenso sind in diesem Jahre diejenigen in den Jahren 1875 und 1876 geborenen Schüler nochmals zu impfen, bei denen die Impfungen der Jahre 1887 und 1888 erfolglos waren. — **Die Bescheinigung über die geschehene Impfung ist dem Medicinal-Bureau (Admiralitätstraße 3/4 I) vorzulegen.**

2. Auf die folgenden Bestimmungen der Schulordnung für die Hamburgischen höheren Staatsschulen wird ganz besonders aufmerksam gemacht:

§ 5, Abs. 2. Die Dispensation vom Turn-Unterrichte kann nur auf Grund eines nach dem festgestellten Formulare ausgestellten ärztlichen Attestes erfolgen, welches erforderlichen Falles dem Medizinal-Kollegium zur Prüfung vorgelegt wird.

Abs. 3. Jüdische Schüler werden nur auf schriftlichen Antrag des Vaters oder seines Vertreters vom Schulbesuche am Sonnabende und an den jüdischen Feiertagen dispensiert; die Schule lehnt jede Verantwortlichkeit für die aus dieser Schulversäumnis sich ergebenden Nachteile ausdrücklich ab.

§ 8. Vereinigungen unter den Schülern zu wissenschaftlichen oder anderen Zwecken bedürfen der Genehmigung des Direktors.

(NB. Um Mißverständnissen vorzubeugen wird bemerkt, daß diese Genehmigung auch einzuholen ist, wenn ein Schüler der Anstalt sich einer außerhalb derselben bestehenden Vereinigung anzuschließen wünscht.)

§ 11. Ist ein Schüler durch Krankheit am Schulbesuche verhindert, so ist dem Klassenlehrer davon möglichst bald, in der Regel am ersten Tage, Anzeige zu machen. Beim Wiedereintritte des Schülers muß eine vom Vater oder dessen Stellvertreter ausgefertigte Bescheinigung über Grund und Dauer der Versäumnis beigebracht werden. Zum Versäumen der Schule aus anderen Gründen ist **vorher rechtzeitig** die Erlaubnis des Direktors nachzusuchen.

§ 19, Abs. 2. Soll ein Schüler mit dem Ablaufe eines Vierteljahres die Schule verlassen, so ist seitens des Vaters oder seines Vertreters **sechs Wochen vorher** dem Direktor die Anzeige zu machen und zwar spätestens am 17. — in Schaltjahren am 18. — Februar, am 19. Mai, 19. August und 19. November.

Abs. 3. Bei später erfolgender Abmeldung bleibt die Verpflichtung zur Zahlung des Schulgeldes für das folgende Vierteljahr bestehen.

Wir ersuchen die Eltern unserer Schüler in ihrem und ihrer Söhne eigenem Interesse auf das nachdrücklichste, die vorstehenden Bestimmungen genau zu befolgen. Was insbesondere die Bestimmung des § 8 anbetrifft, so wird darauf aufmerksam gemacht, daß auch für einmalige, aus besonderer Veranlassung gewünschte Vereinigungen in einem öffentlichen Lokale vorher rechtzeitig die Erlaubnis des Direktors einzuholen ist.

3. Die Ferien-Ordnung für das bevorstehende Schuljahr ist folgende:

	Schulschluß:	Aufnahme-Prüfung:	Schulanfang:
a. um Ostern 1889	9. April;	—	23. April;
b. um Pfingsten	8. Juni;	—	17. Juni;
c. im Sommer	12. Juli;	—	12. Aug.;
d. im Herbste	24. Septbr.;	25. Septbr.;	7. Oktbr.;
e. um Weihnacht	23. Dezbr. 1889;	—	7. Janr. 1890.

Ein willkürliches Verlängern der Ferien ist nicht zulässig. Sind wirklich zwingende Gründe für die frühere Abreise oder spätere Rückkehr einzelner Schüler vorhanden, so ist **vorher rechtzeitig** unter Beibringung der erforderlichen Beweisstücke (ärztliche Bescheinigung und dgl.) die Erlaubnis des Direktors nachzusuchen.

4. Der Unterricht in der Religionslehre wird für die Klassen Untersekunda und Obertertia in denselben Stunden erteilt, in welche der kirchliche Konfirmanden-Unterricht fällt, nämlich Montags und Donnerstags von 9—10 Uhr. Es liegt daher im Interesse unserer Schüler, daß dieselben den Konfirmanden-Unterricht nicht eher besuchen, als bis sie nach Obertertia versetzt sind, aber auch nicht später, als während des Besuches der Untersekunda. Daß der anderweitige Unterricht, welchen Schüler neben dem Schulunterrichte genießen, **namentlich auch der Musikunterricht**, immer in den rechten Schranken gehalten werde, kann den Eltern nicht dringend genug empfohlen werden.

5. In allen Schulangelegenheiten, in denen ein Schüler Rat und Belehrung bedarf, hat er sich zuerst an seinen Klassenlehrer zu wenden. Diesem ist von allen Privatstunden, welche ein Schüler empfangen soll oder erteilen möchte, vorher Mitteilung zu machen.

6. Die Schule wird darauf bedacht sein, wirklicher Überbürdung der Schüler mit häuslichen Arbeiten vorzubeugen. Die Schule erbittet aber auch dringend die Mitwirkung des Hauses zur Gewöhnung unserer Schüler an zusammenhängendes, regelmäßiges und energisches Arbeiten, an Pflichttreue und pünktliche Sorgfalt, an ein frühes Unterscheiden des Notwendigen vom Angenehmen. Um dem Hause eine Kontrole der Arbeiten zu ermöglichen, sind die Schüler bis III A zum Führen von Aufgabebüchern verpflichtet, in welchen alle Aufgaben eingetragen werden. Als durchschnittliches Maß der erforderlichen täglichen Arbeitszeit gelten 1 — 1½ Stunden für Sexta, 1½ — 2 Stunden für Quinta, 2 Stunden für Quarta, 2—2½ Stunden für III und II und 2½—3 Stunden für I. In Fällen, wo dieses Zeitmaß trotz stetigen Fleißes erheblich überschritten werden sollte, bitte ich um schriftliche Benachrichtigung des Klassenlehrers und erst, wenn auf dem Wege einer ruhigen und sachlichen Mitteilung keine Abhilfe erzielt wird, um

direkte Mitteilung des Sachverhaltes an mich. Derartige Benachrichtigungen werden, wenn anders sie sachlich gehalten sind und nicht hinter der Anonymität sich verstecken, nicht als Beschwerden, sondern als eine dankenswerte Unterstützung betrachtet werden.

7. Für den Austausch thatsächlicher Mitteilungen zwischen Schule und Haus dienen Verkehrsbücher, zu deren Führung die Schüler verpflichtet sind. Etwaige persönliche Erörterungen und Beschwerden bitte ich auf keinen Fall in diese Bücher einzutragen, sondern auf brieflichem Wege an den betreffenden Lehrer gelangen zu lassen. Die Mitteilungen in den Verkehrsbüchern sind von dem Vater des betreffenden Schülers oder dessen Stellvertreter (mit Tinte) zu unterschreiben.

8. Die amtlichen Bekanntmachungen der Schule werden **nur im Amtsblatt** und, soweit sie die Schüler betreffen, durch Anschlag am schwarzen Brette im Schulhause veröffentlicht.

9. In amtlichen Angelegenheiten ist der Unterzeichnete **an den Schultagen sicher von 11—12 Uhr in seinem Amtszimmer** im Wilhelm-Gymnasium zu sprechen.

Hamburg, im März 1888.

Der stellvertretende Direktor des Wilhelm-Gymnasiums:

Prof. Dr. *Bintz*.

Anhang I.

Schüler-Verzeichnis

(1. Februar 1889).

* bezeichnet die bis zum 1. Februar im Laufe des Wintersemesters abgegangenen Schüler. — Der Ortsname giebt den Geburtsort des Schülers, bez. der zweite den Wohnort der Eltern an; diejenigen Schüler, bei deren Namen ein Ort nicht angeführt ist, sind von hier. A. = Altona, B. = Bergedorf, H. = Hamburg, R. = Reinbeck, W. = Wandsbeck.

1. O I a.

1	1	Ahrons, Henry. Pelotas (Brasilien) — A.
2	2	Arning, Adolf.
3	3	Banks, Friedrich.
4	4	Calmann, Adolf.
5	5	de la Camp, Oskar.
6	6	Delbanco, Alfred.
7	7	Embden, Heinrich.
8	8	Jänisch, Oskar.
9	9	Katzenstein, Alfred.
10	10	Ladendorf, Hans.
11	11	Löwenstein, Ernst. Danzig — H.
12	12	Meyer, Felix.
13	13	Neuschler, Fritz.
14	14	Olshausen, Alfred. Rothmannsdorf — H.
15	15	Sonn, Adolf.
16	16	Traugott, Martin.

2. M I a.

* Böhme, Oskar.

17	1	Braband, Karl.
18	2	Ganzer, Emil.
19	3	Genthe, Siegfried. Berlin — H.
20	4	Küstermann, Karl. Singapore — H.
21	5	Kuhlmann, Wilhelm.
22	6	Popert, Hermann.
23	7	Puhlmann, Robert. H. — A.
24	8	Sick, Christian. Neu-Ulm — H.
25	9	Stammann, Alfred.
26	10	Wassermann, Martin.
27	11	Weidemann, Theodor. W. — H.

3. O I b.

* Carr, Willi.
* Colshorn, Rudolf. Bockenheim — H.
* Jencquel, Oskar.
* Möller, Max.

28	1	Barlach, Richard. Ratzeburg — A.
29	2	Brach, Rudolf.
30	3	Brinckmann, Wolfgang.
31	4	v. Busch, Heinrich. Groden bei Cuxhaven.
32	5	Calais, Pierre.
33	6	Glinzer, Otto.
34	7	Heinichen, Edward.
35	8	Janens, Ernst.
36	9	Kamps, Gregor. Cuxhaven.
37	10	Mensendieck, Otto.
38	11	Münzer, Richard. Oppeln — H.
39	12	Oppenheimer, Franz.
40	13	Paul, Georg. Güstrow — H.
41	14	Remé, Adolf.
42	15	Rümker, Charles.

43 16 Schwencke, Emil.
44 17 Sauber, Adolf.
45 18 von Schröder, Alexander.
46 19 Vorwerk, Adolf.
47 20 Vorwerk, Friedrich. Klein Flottbeck — H.
48 21 Werner, Siegmund.
49 22 Wohlwill, Paul. Paris — H.
50 23 Wiencke, Karl.

4. M I b.

* Goepel, Emil. Schwerin — H.

51 1 Brautlecht, Georg. Bremen — H.
52 2 Cohen, Albert.
53 3 Fentz, Adolf.
54 4 Goldmann, Ernst.
55 5 Henschel, Arthur. Breslau — H.
56 6 Holtz, Friedrich.
57 7 Iklé, Max.

5. O II a.

* Held, Heinrich.
* Roosen, Hans.
* Schlüter, Edwin.

58 1 Amsinck, Karl.
59 2 Cramer, Adolf
60 3 Gaspary, Adalbert.
61 4 Gruner, Karl.
62 5 Halben, Hermann.
63 6 Hanfft, Heinrich. A.
64 7 Kaerner, Walther. Sulza — H.
65 8 Kröhnke, Otto. Copiapo — H.
66 9 Leopold, Albert. Sagard — H.
67 10 Liebermann, Oskar.
68 11 Meyer, Hermann. A.
69 12 Möller, Hans.
70 13 Muchow, Robert. H. — A.
71 14 Nottebohm, Hermann.
72 15 Pantaenius, Otto. Lübeck — H.
73 16 Puls, Max.
74 17 Richter, Guido.
75 18 Sauerhering, Otto.
76 19 Scharff, Theodor. Quickborn — H.
77 20 Schollmeyer, Karl.
78 21 Sussmann, Alfred.
79 22 Vogelgesang, Paul. Schraplau bei Halle
[— H.

6. M II a.

80 1 Arnstein, Oskar. Frankfurt a/M. — H.
81 2 Bockelmann, Ludolf.
82 3 Derenberg, Julius.
83 4 Dreyer, Anton. Hagenow — H.
84 5 Haller, Ferdinand.
85 6 Hildebrandt, Ernst. Kassel — H.
86 7 Mönckeberg, Karl.
87 8 Nordheim, Moritz.
88 9 Philipson, Louis. Philadelphia — H.
89 10 Röhlk, Karl. Neumünster — H.
90 11 Rümker, Paul.
91 12 Scholz, Edgar.
92 13 Solmitz, Paul.
93 14 Wulff, Franz.
94 15 Zernitz, Otto. Lübeck — H.

7. O II b.

95 1 Bolzen, Friedrich.
96 2 Bottstein, Hugo.
97 3 Behr, Paul. Groden bei Cuxhaven.
98 4 von Broecker, Joachim. Schleswig — H.
99 5 Edelheim, John.
100 6 Fürstenberg, Paul. Danzig — H.
101 7 Gestefeld, Harry. Philadelphia.
102 8 Goldschmidt, Hermann. Altona — H.
103 9 Gossler, George.
104 10 Hartmeyer, Robert.
105 11 Hedde, Richard. Nortorf — A.
106 12 Hellwig, Wilhelm.
107 13 Herbig, Fritz.
108 14 Kahl, Albert.
109 15 Konow, Waldemar.
110 16 Levandowsky, Max.
111 17 Lüttmann, Wilhelm.
112 18 Martienssen, Oskar.
113 19 Marxen, Adolf. Husum — H.
114 20 Morris, Manuel. Iquique.
115 21 Muhle, Wilhelm.
116 22 Naumann, Hermann.
117 23 Niebour, Max.
118 24 Poel, Wolfgang. Flensburg — H.
119 25 Polano, Oskar.
120 26 Prohme, Rudolf.
121 27 Schlick, Ernst. Neu-Pest — H.
122 28 Schmidt, Otto. A.
123 29 Schnabel, Franz.
124 30 Schwartz, Johann
125 31 Siemers, Kurt. Oevelgönne — H.
126 32 Sieveking, Wilhelm.
127 33 Sprick, Karl. Ciudad Bolivar — H.
128 34 Stave, Hermann.
129 35 Steinmann, Albert. Elberfeld — H.
130 36 Sudeck, Wilhelm. Bredstedt — H.
131 37 Tischbein, Robert. Liverpool — H.
132 38 Ulrich I, Max. Breslau — A.
133 39 Ulrich II, Willy. Breslau — A.
134 40 Voss, Hermann.
135 41 de Voss, Johann.
136 42 Wiepke, Otto.
137 43 Witt, Ludwig. Itzehoe — A.
138 44 Wohlwill, Heinrich.

8. M II b.

139 1 Alexander, Charly.
140 2 Caspar, Frans. Stockholm — H.
141 3 Diederichsen, Emil.
142 4 Ebenstein, Kurt. Berlin — H.
143 5 Falk, Hermann.
144 6 Flemming, Rudolf. St. Petersburg — H.
145 7 Lappenberg, Fritz.

146 8 Magnus, Rudolf.
147 9 Müller, Friedrich. Weinheim — H.
148 10 Redlich, Karl.
149 11 Schultz, Octavius.
150 12 Sorgenfrei, Paul.
151 13 Werner, Max.

9. O III a.

* Goepel, Bruno. Berlin — H.

152 1 Bartram, Julius.
153 2 Behrend, Roland.
154 3 Bieling, Arnold.
155 4 Binder, Nicolaus.
156 5 Bonne, Walther.
157 6 Classen, Walther.
158 7 Cordes, Hugo.
159 8 Dehn, Rudolf.
160 9 Elkan, Fritz.
161 10 Engel, Max.
162 11 Fränkel, Franz.
163 12 Hartogh, Emil. Amsterdam — H.
164 13 Hasselbach, Adolf.
165 14 Heller, Adolf.
166 15 Hellwig, Otto
167 16 Janzen, Rudolf.
168 17 Johanssen, Conrad.
169 18 Kruszynski, Wolf.
170 19 Krutisch, Edgar.
171 20 Kuntze, Wilhelm.
172 21 Lesser, Franz. A.
173 22 Levy, Richard.
174 23 Matthaei, Oscar. Tacna — H.
175 24 Rüttger, Karl.
176 25 Schimpke, Adolf.
177 26 Schlick, Kurt. Fiume — H.
178 27 Schönewald, Ernst. Cassel — H.
179 28 Seemann, John.
180 29 Stuhlmann, Otto.

10. M III a.

181 1 Achilles, Franz.
182 2 Alsing, Wilhelm.
183 3 Bauer, Moritz.
184 4 Berger v. Lengercke, Alexander. Fray
185 5 Böcker, Oskar. [Bentos — H.
186 6 Braune, Richard.
187 7 Dependorf, Hermann.
188 8 Embden, Gustaf.
189 9 Emden, Max.
190 10 Fehlandt, Hugo.
191 11 Genthe, Hugo. Frankfurt a/M. — H.
192 12 Goldenberg, Emil.
193 13 Grimm, Walther.
194 14 von Grambkow, Kurt. Frankfurt a/O. — H.
195 15 Hälssen, Hermann. Cuxhaven — H.
196 16 Hammer, Ludwig. Straßburg — H.
197 17 Hensel, Karl.
198 18 Levy, Alfred.
199 19 Löwenwald, Ludwig.
200 20 May, Theodor.
201 21 Münchmeyer, Hermann.
202 22 Owert, Siegfried.
203 23 Roosen-Runge, Cäsar.
204 24 Samuel, Walther.
205 25 Schulze, Emil. Großömer, Prov. Sachsen
206 26 Seligmann, Otto. [— H.
207 27 Siemsen, Max.
208 28 Streiber, Caesar.
209 29 Sucher, Franz. Königsberg — H.
210 30 Voss, Emanuel. Lüne — H.

11. O III b.

211 1 Bartels, Adolf.
212 2 Barthold, Wilhelm. A.
213 3 Birgfeld, Rudolf.
214 4 Blume, Fritz. Metz — H.
215 5 Cordes, Ernst.
216 6 Crasemann, Edgar.
217 7 von Dammann, Oskar.
218 8 Douglas, Georg.
219 9 Evers, Robert. Valparaiso — H.
220 10 Fröschel, John.
221 11 Götte, Richard. Bankok — H.
222 12 Grisson, Reinhold.
223 13 Hane, Walther.
224 14 Herwig, Walther. Spandau — H.
225 15 Hinrichsen, Edmund.
226 16 Jencquel, Adolf.
227 17 Jessurun, Paul.
228 18 Ladendorf, Wilhelm.
229 19 Lange, Wilhelm.
230 20 Leidig, Emil.
231 21 Lutteroth, Ascan.
232 22 Müller, Rudolf.
233 23 Ochsen, Fritz. Ottensen.
234 24 Pietzmann, Gustaf. A. — H.
235 25 Prencke, Otto.
236 26 Rahtjen, Arnold. Bremerhaven — H.
237 27 Rodd, Brent. Sidney — H.
238 28 Roosen, Arthur.
239 29 Sanne, Louis. Hayti — H.
240 30 Scharlach, Otto.
241 31 Schlubach, Herbert. Valparaiso — H.
242 32 Schmid, Hans. Mexico — H.
243 33 Schütt, Alfred.
244 34 Sprick, Paul. Venezuela — H.
245 35 Seligmann, Edgar.
246 36 Thormählen, Max.
247 37 Vogeler, Gustaf.
248 38 Wolf, Karl.

12. M III b.

* Richter, Victor. Blankenese — H.

249 1 Bärentz, Hugo.
250 2 Braun, Gustaf. A. — H.
251 3 Cropp, Paul.
252 4 Dahlström, Walther.
253 5 Ferber, Robert.
254 6 Frankfurter, Edwin.
255 7 Freund, Otto.

256	8	Freydag, Rudolf.
257	9	Friedheim, Arthur.
258	10	Hecht, Karl.
259	11	Kirsten, Johannes.
260	12	Krutisch, Bruno.
261	13	Lamprecht, Hermann. Lübeck — B.
262	14	Meinhold, Gustaf.
263	15	Mensendieck, Winfried.
264	16	Reimann, Theodor.
265	17	Ritter, Paul.
266	18	Rümker, Georg.
267	19	Schlochauer, Oskar.
268	20	Schlüter, Edward.
269	21	Schneider, Richard.
270	22	Schultz, Hellmuth.
271	23	Sohège, Max.
272	24	Steger, Fritz.
273	25	Uhle, Otto.
274	26	Vermehren, Edward.
275	27	Wäntig, Gottfried.
276	28	Windmüller, Edgar. Manchester — H.

13. O IV.

277	1	Beenke, Henry.
278	2	Boockholtz, Otto.
279	3	Büchel, Wilhelm. Düren — H.
280	4	Bünz, Rudolf. A.
281	5	Busch, Alfred.
282	6	Calais, Jules.
283	7	Davids, Fritz.
284	8	Dependorf, Heinrich.
285	9	Grimm, Adolf.
286	10	Halben, Reinhold.
287	11	Hellwig, Adolf.
288	12	Herbig, Karl.
289	13	Hopff, Hermann.
290	14	Jessurun, Moritz.
291	15	Kelting, Otto.
292	16	Kundt, Ernst.
293	17	Liebermann, Alfred.
294	18	Lühmann, Maximilian.
295	19	Mumssen, Rudgar.
296	20	Mutzenbecher, Hans.
297	21	Paulsen, Ernst. A. — Ovelgönne.
298	22	Pauly, Klaus.
299	23	Peters, Bruno.
300	24	Petersen, Gustaf.
301	25	Pfennig, Alfred.
302	26	Rüters, Paul.
303	27	Schmidt, Alfred.
304	28	Schümann, Peter. A. — H.
305	29	Spick, Walther.
306	30	Stettiner, Alfred. Berlin — H.
307	31	Streng, Richard. Nürnberg — H.
308	32	Suhl, Hans. Singapore — H.
309	33	Ulmer, Georg.
310	34	de Vivanco, Luis.
311	35	de Voss, Cäsar.
312	36	Wohlwill, Otto.
313	37	Wolffson, Hans.

14. M. IV.

314	1	Albrecht, Hugo. Rendsburg — H.
315	2	Asschenfeldt, Oscar.
316	3	Borchert, Alfred.
317	4	Brütt, Walther.
318	5	Creutzburg, Julius.
319	6	Cropp, Willi. Moorburg — H.
320	7	Fick, Walther.
321	8	Götte, Rudolf.
322	9	Götz, Walther.
323	10	Haas, Edgar. Wiesbaden — H.
324	11	Harden, Amandus.
325	12	Knochendöppel, Karl. Reval — H.
326	13	Krüger, Hans.
327	14	Lasker, Ernst.
328	15	Levy, John.
329	16	Merck, Heino.
330	17	Meyer, Ernst.
331	18	Mönckeberg, Georg.
332	19	Münchmeyer, Albert.
333	20	Pauli, Adolf. Soest — H.
334	21	Pfennig, Richard.
335	22	Rothe, Gustaf. Brahlsdorf — H.
336	23	Schlüter, Ferdinand.
337	24	Timmermann, Bruno.
338	25	Uhlmann, Fritz. Köln — H.
339	26	de Vivanco, Adolf.
340	27	Voss, Hans.
341	28	Wichmann, John.

15. O. V.

* von Finckh, Otto. Wien — H.
* Ross, John.
* Schröder, Wilhelm. Cheefoo — H.
* Sittard, Richard. Stuttgart — H.
* Zieser, Georg. Stade — H.

342	1	Arnemann, Hans. Neumühlen — H.
343	2	Asch, Albert.
344	3	Augustin, Max. Lünen — H.
345	4	Baack, Bruno.
346	5	Bennaton, John. Petropolis, Brasilien—H.
347	6	Bernhardt, Oskar.
348	7	Blankenstein, Kurt. Dortmund — H.
349	8	Bodensieck, Paul.
350	9	Braun, Henry.
351	10	Braunschweig, Paul. Chaux de Fonds—H.
352	11	Cohen, Alfred.
353	12	Cropp, Hans.
354	13	Goldenberg, Rudolf.
355	14	Grossmann, Reinhold.
356	15	Gumprich, Paul.
357	16	Hanne, Wilfrid. Elgersburg — H.
358	17	Hesekiel, Wilhelm.
359	18	Hirsch, Henry.
360	19	Hoff, Hans.
361	20	Jacubowsky, Hermann.
362	21	Jebens, Georg.
363	22	Jencquel, Richard.
364	23	Koopmann, Feodor,
365	24	Lange, Karl.

366	25	Leer, Albert.
367	26	Liefmann, Emil. Philippolis — H.
368	27	Magnus, Walther.
369	28	Menge, Heinrich. Bahia.
370	29	Minnemann, Karl.
371	30	Niehaus. Henry.
372	31	Schepkowsky, Kurt.
373	32	Schröder, Edgar.
374	33	Stettiner, Oskar. Berlin — H.
375	34	Stegelmann, Felix. Fentsch — H.
376	35	de Voss, Eberhard.
377	36	Warburg, Robert.
378	37	Wichern, Heinrich.
379	38	Witter, Adolf.
380	39	Wohlwill, Konrad.

16. M V.

381	1	Andersen, Otto.
382	2	Arland, Otto. Hagen — H.
383	3	Bartels, Wilhelm.
384	4	Bauer, Paul.
385	5	Botsch, Waldemar.
386	6	Braun, Emil. Altona — H.
387	7	Bromberg, Henry.
388	8	von Clausewitz, Albert.
389	9	Dehn, Max.
390	10	Deseniss, Percy.
391	11	Diederichsen, Gustaf.
392	12	Götte, Robert.
393	13	Goldenberg, Karl.
394	14	Goldschmidt, Leopold. Lissabon — H.
395	15	Haarburger, Paul.
396	16	Haas, Wilhelm.
397	17	Hartogh, Albert. Rotterdam — H.
398	18	Hasenkampf, Ferdinand.
399	19	Joseph, Otto. A. — H.
400	20	Kanzki, Benno.
401	21	Lipschütz, Harry
402	22	Lühmann, Karl. Penang — H.
403	23	von Oertzen, Max.
404	24	Oppermann, Paul.
405	25	Petersen, Otto
406	26	Plass, Hermann.
407	27	Riemann, Robert. Bielefeld — H.
408	28	Rosenbacher, Leo.
409	29	Samson, Maria.
410	30	Schlubach, Eric. Valparaiso — H.
411	31	Solmitz, Friedrich.
412	32	Stelling, Paul.
413	33	Stemann, Hans.
414	34	Timmermann, Erwin.
415	35	Wendt, Walther. Brandenburg — H.
416	36	Zachmann, Philipp.
417	37	Zesch, Arthur. A. — H.

17. O VI.

* Goepel, Fritz. Berlin — H.
* Kehrhahn, Edmond.

418	1	Brauer, Karl. Strelna b. St. Petersb. — H.
419	2	Breer, Hugo.
420	3	Busse, Walther.
421	4	Cohn, Alfred.
422	5	Daniel, Otto.
423	6	Diederichs, Hermann.
424	7	Ehrlich, Ernst. Hannover — H.
425	8	von Finckh, George. Graz — H.
426	9	Gestefeld, Franz.
427	10	Goerke, Gustaf. Frankfurt a/M. — H.
428	11	Hallstein, Hermann.
429	12	Harms, Christian. Harburg — H.
430	13	Heinemann, Albert.
431	14	Hertz, Hugo.
432	15	Horschitz, Erwin.
433	16	Jacubowsky, Oskar. Berlin — H.
434	17	Jencquel, Ascan.
435	18	Kaempf, Rudolf.
436	19	Kauffmann, Otto.
437	20	Klose, Ferdinand.
438	21	Krekeler, Oskar.
439	22	Kreplin, Albert. Altona — H.
440	23	Kronenwerth, Max.
441	24	Kühl, Hans. Carlsburg — H.
442	25	Lentz, Karl. Lübbersdorf in Holstein — H.
443	26	Leschke, Max. Ottensen — H.
444	27	Magnus, Paul.
445	28	Michael, Ernst.
446	29	Nottebohm, Arthur.
447	30	Redlich, Heinrich.
448	31	Reich, Max.
449	32	Reimers, Hans. Nortorf. — H.
450	33	v. Rodziewitz, Theodor.
451	34	Rohwer, Fritz. Bremen — H.
452	35	Schaernack, Karl.
453	36	Schultz, Arnold.
454	37	Sittard, Alfred. Stuttgart — H.
455	38	Sonnenkalb, Hans.
456	39	Stock, Fritz. Leipzig — H.
457	40	Stuht, Friedrich.
458	41	Timmermann, Walther.
459	42	Voss, Bernhard.
460	43	Wendt, Hans.
461	44	Wigger, Heinrich.
462	45	Wittnich, Karl.
463	46	Wohlgemuth, Hans.

18. M VI.

464	1	Becker, Otto. Cuxhaven — H.
465	2	Bendixsohn, Oskar. Geestemünde — H.
466	3	Beschütz, Max.
467	4	Beumelburg, Fritz. Königsberg — H.
468	5	Bleichröder, Arthur.
469	6	Brackenhoeft, Alfons.
470	7	Bromberg, Georg.
471	8	Cropp, Max
472	9	Daus, Otto. Stockholm. — H.
473	10	Derenberg, Richard.
474	11	Elkan, Albert.
475	12	Fieker, Hans. Stettin — H.
476	13	Fränkel, Ludwig.

477	14	Freund, Ernst. A. — H.
478	15	Goldschmid, Hans.
479	16	Hampe, Theodor. Eschwegen.
480	17	Hanne, Reinhold.
481	18	Joseph, Paul. A. — H.
482	19	Klentze, Adolf.
483	20	Knöhr, Erik.
484	21	Kronenwerth, Hans.
485	22	Lewandowsky, Felix.
486	23	Meyer, Gustaf. Zwischenahn i. Oldenburg
487	24	Moser, Moritz. [— H.
488	25	Muhle, Paul.
489	26	Oldenburg, Gustaf.
490	27	Otto, Robert.
491	28	Paulsen, Paul. A. — H.
492	29	von der Porten, Paul.
493	30	Schlüter, Karl.
494	31	Stürup, Wilhelm. Caracas.
495	32	Schmarsow, Hans. Rehna — H.
496	33	Stemann, Alfred.
497	34	Wittenberg, Gustaf.
498	35	Wittmaak, Wilhelm.
499	36	Zeller, Alfred.

Anhang II.

Die Wohnungen der Lehrer:

Augustin: Fruchtallee 28.
Barthold: kleine Gärtnerstraße 74, Altona.
Bintz: Domstraße 8.
Böhme: Richardstraße 4 a, Barmbeck,
(vom 1. Mai an: Güntherstraße 59 II).
Boensel: Neuer Laufgraben 27 III.
Brachmann: Schulterblatt 139 II, Altona.
Bromig: kleiner Kirchenweg 8, St. Georg.
Christensen: Wrangelstraße 11.
Dettmer: Schlump 31 II.
Dissel: Grindelberg 7 b III.
Glänzer: Bogenstraße 19 II.
Goepel: Gänsemarkt 35 III.
Hansen: Grindelberg 18.
Jacoby: Wrangelstraße 19.
Kayser: Papenhuderstraße 52 II.
Keferstein: Fruchtallee 64 III.
Kersten:
Klamroth: erster Durchschnitt 6 I.
Kleinschmit: Klosterallee 9 III.
Klussmann: Wrangelstraße 29.
Kümpel: Feldweg 3.
Lieberg: Schulterblatt 145 I, Altona.
Pauli: Grindelallee 188.
Rambeau: Hoheweide 5.
Reinstorff: Lübeckerstraße 4 III.
Schader: Martinallee 18.
Schnee: Peterstraße, Bahrenfeld.
Schultess: Hohenfelde, Güntherstraße 59 a.
Waldbach: Schlump 2 a II.
Weise: Bogenstraße 3 III.
Wendt: Eimsbütteler Chaussee 143 II.
Wilms: Bogenstraße 24 II.