3

Wilhelm-Gymnasium

zu

Hamburg.

Schuljahr 1883—1884.

Hamburg, 1884.

Gedruckt bei Th. G. Meißner, Eines Hohen Senates, wie auch des Johanneums Buchdrucker.

Wilhelm-Gymnasium

zu

Hamburg.

3. Jahresbericht.

Schuljahr 1883—1884.

Inhalt:

Hamburg, 1884.

Gedruckt bei Th. G. Meißner, Eines Hohen Senates, wie auch des Johanneums Buchdrucker.

1884. Progr. Nr. 662.

Über den

Rechenunterricht

an höheren Schulen.

(Entwurf eines methodischen Leitfadens. Erster Abschnitt.)

Von

Dr. Friedrich Schader.

Einleitung.

Die häufigen Klagen über unzureichende Erfolge des Rechenunterrichtes an höheren Schulen, Hand in Hand mit den im Rechnen besonders stark hervortretenden Ueberbürdungsklagen, legen unzweifelhaft gerade der genannten Art von Schulen die Pflicht auf, diesem Lehrgegenstande ein größeres Interesse zu widmen, als es bisher leider der Fall gewesen ist.

Eine nähere Untersuchung ergiebt als die Hauptschäden des jetzigen Rechenunterrichtes: eine Ueberfülle des gebotenen Stoffes, einen Mangel an methodischer Durcharbeitung desselben und das Fehlen eines geeigneten Lehrbuches (Leitfadens).

Betreffs des ersten Punktes brauche ich nur zu verweisen auf das Ausziehen der Quadratwurzel (mathematische Heißsporne verlangen sogar das Ausziehen der Kubikwurzel), das abgekürzte Rechnen mit Dezimalbrüchen, die schwierigeren Fälle der sogenannten bürgerlichen Rechnungsarten sowie der Flächen- und Körperberechnung. Dies alles sind Gegenstände, die noch heute in den meisten Rechenbüchern dem Pensum für höchstens zwölfjährige Knaben zugewiesen werden. Eine beherzigenswerte Mahnung nach dieser Richtung enthält die preußische Ministerialverfügung vom 31. März 1882 (vergl. S. 24, 35, 44).

Wenn diese Verfügung ferner (S. 24) sagt: „Der elementare Rechenunterricht in den unteren Klassen ist so zu erteilen, daß er mit dem darauf folgenden arithmetischen Unterrichte nicht nur im Einklange steht, sondern denselben vorzubereiten und zu unterstützen geeignet ist“, so ist damit in aller Klarheit und Bestimmtheit ausgesprochen, was uns im Rechenunterrichte besonders not thut. Derselbe muß das Material in streng systematischer Ordnung, in fester organischer Verbindung darbieten und mehr als bisher nicht nur auf volles Verständnis, sondern auch auf die Fähigkeit des Schülers achten, die Gründe des Verfahrens jederzeit mit aller Präcision angeben zu können. Nur dann bewirkt dieser Unterricht eine solche Schulung des Geistes, die eine Vorbereitung und wirksame

Unterstützung des späteren arithmetischen Unterrichtes genannt zu werden verdient [1]). Wie weit wir von diesem Ziele noch entfernt sind, zeigt eine unbefangene Prüfung der vorhandenen Rechenbücher. Es liegt mir fern, die Vorzüge derselben im Einzelnen verkennen zu wollen, und ich weiß, daß viele von ihnen in hohem Grade dazu beigetragen haben, den Rechenunterricht von dem Uebermaße des Mechanischen, welches ihm früher anhaftete, zu befreien und damit eine wirksamere Behandlung des Gegenstandes herbeizuführen. Allein ich verhehle mir auch nicht, daß noch viel zu thun übrig geblieben ist, daß der so reichlich vorhandene Stoff einer weiteren methodischen Durcharbeitung dringend bedarf [2]). Wohl auf keinem anderen Gebiete des Unterrichtes herrscht gegenwärtig eine auch nur annähernd so große Meinungsverschiedenheit und Zerfahrenheit wie hier. Ueber die wichtigsten Fragen, wie Pensenverteilung, Begrenzung des Stoffes überhaupt, die Frage, ob ein besonderes Lehrbuch oder nur eine Aufgabensammlung notwendig ist, Kopf- und schriftliches Rechnen u. s. w. gehen, gewiß zum großen Schaden der Schule, die Ansichten der Fachmänner weit auseinander.

Auffallend ist es und sehr betrübend, daß die Mathematiker, obgleich sie meist leicht bei der Hand sind, bei Beginn des arithmetischen Unterrichtes ein absprechendes Urteil über die im Rechenunterrichte erzielten Resultate zu fällen, sich doch um den letzteren im Allgemeinen sehr wenig kümmern. Vielmehr halten sich viele mit einer gewissen Vornehmheit davon fern, während doch kein Philologe es für unter seiner Würde hält, in den unteren Klassen lateinischen Unterricht zu erteilen; im Gegenteil, der lateinische Unterricht in Sexta gilt mit Recht als ein eigentlicher Prüfstein philologischer Unterweisungskunst. Aber freilich dieser Unterricht gilt ja als wissenschaftlich, jener als elementar. Es ist Zeit, daran zu denken, daß dieser Unterschied ein äußerlicher, in der Sache selbst nicht begründeter, vielmehr ein geschichtlich gewordener ist.

Mit dem eben hervorgehobenen Uebelstande steht nun in engstem Zusammenhange das Fehlen eines geeigneten Lehrbuches (Leitfadens [3]). Wie sollte es sonst kommen, daß das Rechnen allein unter allen wichtigeren Lehrgegenständen eines solchen entbehrt? Und welche Gründe sprechen für ein Lehrbuch der Arithmetik, die nicht auch für ein Lehrbuch des Rechnens geltend gemacht werden könnten? Die oft gehörte Bemerkung: „Im Rechnen muß der Schüler die Sache im Kopfe, nicht im Buche haben" kann nicht in's Gewicht fallen, da dasselbe von jedem anderen Unterrichtsfache auch gesagt werden kann.

---

[1]) Um Mißverständnissen vorzubeugen, möchte ich bemerken, daß ich bei dieser stärkeren Betonung der formalen Seite des Rechenunterrichtes doch auch der materiellen ihr Recht gesichert wissen will. Die höhere Schule soll nicht vergessen, daß sie den Schüler auch mit nützlichen, für das praktische Leben notwendigen Kenntnissen auf diesem Gebiete auszurüsten hat, und es darf die wichtige Rechenfertigkeit unter der empfohlenen Behandlungsweise nicht leiden.

[2]) Die Rechenbuchfrage ist offenbar eine brennende. Vergl. den Bericht über die Direktoren-Versammlung der Provinz Hannover vom Jahre 1879.

[3]) Wir haben in großer Anzahl Rechenbücher, auch Anweisungen für den Lehrer zum Unterricht sowie zum Selbstunterricht, aber keinen methodischen Leitfaden für die Hand des Schülers. Mir ist nur eine einzige Arbeit dieser Art bekannt, nämlich „Grundzüge für den Rechen-Unterricht" von Dr. H. Schwarz. Als „geeigneter" Leitfaden kann sie mir nicht erscheinen.

Die Vorteile eines Leitfadens, wie er dem Verfasser vorschwebt, sind leicht einzusehen. Zunächst wird dem Schüler dadurch die repetitionsweise Durcharbeitung des in der letzten Stunde Durchgenommenen sowie früher behandelter Abschnitte erleichtert; und für größere Repetitionen, wie sie z. B. zu Anfang des Lehrjahres sich über die Pensen der vorhergehenden Klassen erstrecken sollten, ist ein solcher nicht zu entbehren [1]). Derselbe gestattet ferner ein Ausfüllen vorhandener Wissenslücken des Einzelnen mit verhältnismäßig geringem Aufwand von Arbeit. Er verschafft endlich eine bessere Uebersicht über das zu beherrschende Gebiet, läßt eine leichtere Orientierung zu und fördert die Einsicht in den organischen Zusammenhang der zu lösenden Aufgaben.

Gelingt es also, bei einer ziemlichen Beschränkung des Stoffes denselben in festerem Gefüge und übersichtlicher Darstellung in Form eines Lehrbuches zu bieten, so wird der Schüler an Zeit und Kraft gewinnen müssen.

An der Erreichung dieses Zieles nach Kräften mitzuarbeiten fühle ich mich um so mehr verpflichtet, als ich bei dem allmählichen Aufbau unseres Wilhelmgymnasiums in der Lage gewesen bin, als Mathematiker mehrere Jahre hindurch den Rechenunterricht in den unteren Klassen gleichzeitig zu erteilen. Das von den verschiedensten Seiten her die vier unteren Klassen füllende Schülerpublikum [2]) forderte die Kraft des Lehrers in seltenem Maße heraus und bot andererseits die reichlichste Gelegenheit zu interessanten Beobachtungen und vielfach Veranlassung zu den ernstesten Betrachtungen über den Rechenunterricht an den höheren Schulen.

Aus diesen Wahrnehmungen heraus erwuchs der Gedanke, einen methodischen Lehrgang für das Rechnen zu entwerfen; und so möchte ich hiermit zunächst den das Pensum der Sexta umfassenden Teil eines Leitfadens vorlegen. Die Pensen der Quinta und Quarta, sowie eine Sammlung von Aufgaben werden im Laufe des Sommers fertig gestellt werden.

Ich bitte die Arbeit mit der Nachsicht aufzunehmen, die ein erster Versuch auf fast ganz unbebautem Felde wohl in Anspruch nehmen darf.

Bemerkungen zum Leitfaden.

1) Der Schüler bringt in die Sexta eine gewisse Menge von Rechenkenntnissen und Fähigkeiten mit, die aber, der Altersstufe desselben entsprechend, auch bei dem denkbar besten bisher genossenen Unterrichte doch mehr oder weniger mechanischer Natur sind. Diese Fertigkeiten müssen durchaus nicht nur erhalten, sondern durch fortgesetzte Uebungen weiter befestigt werden. Daneben aber soll von vornherein der streng methodische

---

[1]) Daß auch für höhere Klassen, namentlich für die Tertien, eine derartige Repetition heilsam, oft unbedingt notwendig ist, wird jeder erfahrene Lehrer zugeben.

[2]) Das Gymnasium wurde Ostern 1881 mit den 4 untersten Klassen eröffnet. Die ersten 53 Schüler kamen von 19 verschiedenen Schulen.

Unterricht nach dem Leitfaden bestehen. Langsam und sicher vorwärts schreitend soll dieser Unterricht nach und nach überall da, wo bis jetzt noch Dunkel herrschte, Licht verbreiten.

So wird im deutschen Unterrichte in Sexta dafür gesorgt, daß das, was der Knabe bisher von seiner Muttersprache gewissermaßen instinktiv, ohne Einsicht in die Sprachgesetze, gelernt hat, ihm nicht verloren gehe, sondern befestigt und erweitert werde. Aber es tritt jetzt die Grammatik begleitend hinzu, und an der Hand dieses Hülfsmittels erst wird der Schüler nach und nach in das volle Verständnis seiner Muttersprache eingeführt.

2) Von der größten Wichtigkeit wird es sein, daß in Sexta das Wesen der (bisher überwiegend empirisch eingeübten) vier Species, d. h. die durch dieselben bedingten Beziehungen der Zahlengrößen zu einander, zur vollsten Klarheit gebracht werde. Die hier gegebenen Sätze, termini technici u. s. w. müssen zum unverlierbaren Eigentum werden, etwa wie das sogenannte kleine Einmaleins. Auf dieser Stufe soll der Schüler bewußt rechnen lernen, indem er daran gewöhnt wird, den Nachweis der Richtigkeit seines Verfahrens jederzeit zur Hand zu haben. Die vier Species bilden den Kern, um welchen herum sich alles andere krystallisiert. Das allein scheint mir die für die höheren Schulen richtige concentrische Methode zu sein.

Ich bin mir sehr wohl bewußt, daß gerade diese der späteren arithmetischen Behandlung möglichst angepaßte Darstellung der vier Species vielfach heftigen Angriffen begegnen wird. Zur Abwehr möchte ich Folgendes bemerken: Die Einführung der arithmetischen termini technici in den Rechenunterricht an höheren Schulen (auch für die Sexta schon) ist eine neuerdings so oft und so energisch ausgesprochene Forderung, daß es einer Rechtfertigung betreffs dieses Punktes wohl kaum bedarf. [1]) Es dürfte sich des Weiteren kaum um etwas anderes handeln, als die mit Beweisen versehenen Sätze. Dieselben machen allerdings leicht den Eindruck, als seien sie für den Sextaner nicht recht faßlich, tote Regeln; ein ernstlicher Versuch wird aber zeigen, daß der Schüler diese Sätze nicht nur versteht, sondern sogar gern lernt und handhabt, da sie in präciser Fassung das aussagen, was er doch begreifen und sich aneignen muß, wenn anders der Unterricht ein guter ist.

Was die Multiplikation anlangt, so scheint es mir wichtig, von vornherein das Produkt als benannte Zahl auffassen zu lassen, wo der Multiplikator die Anzahl, der Multiplikandus die Benennung und Einheit liefert (z. B. 6×7 als 6 Siebener, wie 9×10 als 9 Zehner; vergl. 4 Dutzend $= 4 \times 12$). Hiermit ist ein klarer Blick eröffnet und manche Regel vermieden, z. B. die über die Multiplikation eines Produktes.

Nur an kleineren Zahlen, von denen der Schüler aus dem bisherigen Unterrichte eine lebendige Anschauung hat, unbenannten und benannten, sollen die vier Grundoperationen (Erster Abschnitt, Teil A) durch Kopfrechnen eingeübt werden. Hier wie überall ist langsames und sicheres Vorwärtsschreiten unumgänglich notwendig. [2])

---

[1]) Man vergl. die weit verbreiteten Rechenbücher von Harms und Kallius, Koch etc.
[2]) Auf das Durcharbeiten des Teiles A des ersten Abschnittes verwende man etwa ein halbes Jahr.

Daß alles Rechnen auf dem Zählen beruht, ist stark hervorgehoben.

Als Anwendung der Multiplikation und Division tritt dann die Regeldetri (in einfachen Zahlen) auf.

3) Teil B, welcher die mehrfach benannte Zahl behandelt, beginnt mit dem Begriff der Sorte. Dies führt uns auf die mehrfach benannte Zahl, welche eine Summe einfach benannter Zahlen ist. Die vier Species mit solchen Zahlen sind also ein Operieren mit Summen, demnach nur eine Anwendung des schon in Teil A Gelernten in Verbindung mit der Sortenverwandlung. Als specieller Fall der mehrfach benannten erscheint die mehrstellige Zahl. Hier finden das dekadische Zahlensystem, eine kurze Betrachtung anderer Zahlensysteme und die römischen Zahlen ihre geeignete Stelle. Nun schließt sich die Zeitrechnung an; das Neue, was dieselbe bietet, liegt nur in der Einkleidung.

4) Es folgen die für das Rechnen notwendigsten zahlentheoretischen Erörterungen, betreffend die Teilbarkeit der Zahlen und die Primzahlen. Zeitrechnung und Primzahlen sind aus verschiedenen Gründen am besten der Quinta zuzuweisen.

5) Die Bruchrechnung bildet den Inhalt des zweiten Abschnittes. Sie ist nach Möglichkeit alles Gekünstelten entkleidet. Wo es nur anging, ist die Verknüpfung mit dem Vorhergehenden betont, namentlich bei der Auffassung des Bruches als einer benannten Zahl (5 Achtel).

Schon im ersten Abschnitte sind die Brüche eingeführt, obgleich er die Ueberschrift „Ganze Zahlen“ führt. Sie werden aber, was mir wichtig erscheint, dort nie in der Form des Bruches, sondern consequent nur in der der benannten Zahl (Sorte) gegeben. Mit Dritteln, Zehnteln u. s. w., deren Begriff, wenn nicht aus dem bisherigen Unterrichte, so doch unzweifelhaft aus dem gewöhnlichen Leben längst klar ist, wird gerechnet wie mit Mark, Dutzend u. s. w. Auch sind im Anhange die Bruchsorten, und zwar in dieser Schreibweise, neben den anderen Sorten aufgezeichnet; sie sind mit diesen in Sexta einzuüben. Auf diese Weise vorbereitet, tritt der Schüler in der Quinta an die systematische Behandlung des Bruches, die nun folgt, heran; das Neue ist für ihn jetzt zunächst nur die eigentümliche Form.

6) Auch die Dezimalbrüche (Abschnitt III) werden unter stetem Hinweis auf schon Bekanntes behandelt und können jetzt keine Schwierigkeiten bieten. Bei der Division ist alle Weitschweifigkeit vermieden. Die Dezimalbrüche bieten dem Kopfrechnen verhältnismäßig wenig Stoff, desto mehr aber dem schriftlichen Rechnen. Denn bei der großen Wichtigkeit derselben für den späteren Unterricht sowie für das praktische Leben müssen die betreffenden Regeln schriftlich mit besonderem Nachdruck eingeübt werden. Damit diese Uebungen aber nicht an nackten, sehr bald Ueberdruß erzeugenden Exempeln angestellt zu werden brauchen, habe ich vorher einen Paragraphen, enthaltend das Analysieren zusammengesetzter Zahlenausdrücke, eingeschaltet, der nun eine Fülle von Aufgaben bietet, in welche man die erwähnten Exempel, in Verbindung zugleich mit gemeinen Brüchen, einflechten kann. Dieses Analysieren ist in dem Sextapensum vorbereitet.

Das abgekürzte Rechnen mit Dezimalbrüchen ist nicht berücksichtigt.

7) Die Behandlung der sogenannten bürgerlichen Rechnungsarten, welche gemäß der gleich anfangs in der Einleitung ausgesprochenen Ansicht in möglichst kleiner Dosis dargeboten werden, stützt sich auf das Schlußverfahren (Regeldetri). Die Proportion ist ausgeschlossen. Beim Kettensatze ist auf die Begründung des Verfahrens großes Gewicht gelegt, da sie dem Schüler Schwierigkeiten zu bereiten pflegt.

8) In der Zinsrechnung sind zwanglos Buchstabengrößen eingeführt bei Aufstellung der Formel $z = \frac{cpi}{100}$. Aus dieser lernt der Schüler die drei andern Formeln für c, p, i entwickeln [1], die jedoch auch, ebenso wie die erste, unmittelbar durch Schlußverfahren gewonnen werden.

9) Jeder neue Stoff soll, soweit dies irgend seine Natur zuläßt, durch die vielseitigsten Kopfrechenaufgaben eingeübt und zum vollen Verständnis gebracht werden. [2] Erst dann treten schriftliche Aufgaben mit größeren Zahlen oder in besonderen Einkleidungen hinzu. Anfangs würden sie nur verwirrend wirken.

10) Die den einzelnen Paragraphen beigefügten Fragen und Aufgaben geben zu solcher Einübung durch Kopfrechnen eine Anregung. Sie ergänzen ferner den Stoff und leiten den Schüler bei seinen Repetitionen zu größerer Selbstthätigkeit an. Es wird darauf zu halten sein, daß dieser zur Lösung der Fragen und Aufgaben jederzeit gerüstet ist. Bei unermüdlichem Repetieren in der Schule kann dieses Ziel sehr wohl erreicht werden.

11) Die häufigen Verweise auf Früheres und Späteres dienen dazu, die Einsicht in den Zusammenhang des Ganzen zu fördern.

12) Von Sätzen und Regeln sind nur diejenigen gegeben, welche direkt von praktischem Nutzen für das Rechnen sind und welche samt ihrer Begründung von dem Schüler ohne Mühe verstanden und behalten werden. So habe ich, um nur ein Beispiel anzuführen, mich sogar dazu verstanden, die allgemein übliche Form des Aufsuchens des Generalnenners (des kleinsten gemeinschaftlichen Vielfachen mehrerer Zahlen) unberücksichtigt [3] zu lassen, obgleich sie bequem zu handhaben und dem Schüler wegen ihres sozusagen netten Äußern angenehm ist. Es ist bekannt, daß die Begründung des Verfahrens für den Schüler sehr schwer zu verstehen und zu reproduzieren ist und ihm nach kurzer Zeit in Nebel zerfließt. Das andere Verfahren ist ja im Grunde dasselbe und hat den Vorzug größerer Klarheit. Man sollte überhaupt beim Addieren ungleichnamiger Brüche solchen Aufgaben, welche auf große, schwer zu übersehende Zahlen führen, keinen so großen Spielraum gönnen, wie es meistens der Fall ist. Das ist eine direkte Anleitung zu mechanischem Arbeiten und Zeitverschwendung, zumal da weder der spätere Unterricht, noch das praktische Leben derartige Aufgaben stellt.

13) Die Beweise sind möglichst natürlich, so zu sagen populär gehalten, ohne daß dadurch die nötige Strenge geopfert sein dürfte.

---

1) Von theoretischer Behandlung der Gleichungen ist natürlich nicht die Rede.

2) Schlimm ist es um den Unterricht bestellt, wenn, wie das leider noch häufig der Fall ist, das Kopfrechnen in den Hintergrund tritt.

3) Weil jedoch Viele sie zu schmerzlich vermissen würden, ist sie, allerdings ohne Begründung, in einer Anmerkung beigefügt.

14) Betreffs des schriftlichen Rechnens sind nur die ganz allgemein anerkannten, unerläßlichen Darstellungsformen gegeben, wie sie z. B. in den vier Species und dem Kettensatze auftreten. Bei der Regeldetri, der Sortenverwandlung u. s. w. verfahre der Lehrer nach eigenem Ermessen. Maß zu halten ist hier dringend geboten, denn dem Schüler wird die doppelte Arbeit zugemutet, wenn er für jede neue Art von Exempeln eine genau bis ins Kleinste festzuhaltende Form der schriftlichen Darstellung sich zu merken hat. Eine gewisse Freiheit in diesem Punkte gewöhnt den Schüler an Selbstständigkeit.

15) Um Präcision des Ausdruckes bin ich sehr bemüht gewesen. Unpräcise mündliche und schriftliche Ausdrucksweise geht mit unklarem Denken Hand in Hand und muß energisch bekämpft werden. Leider sind noch immer viele Rechenbücher, sogar sehr weit verbreitete, nicht frei von gröbsten Verstößen dieser Art. Häufig findet sich Unklarheit in der schriftlichen Darstellung der Resolutions- und Reduktionsrechnungen. Sie wird verschwinden, wenn nur mit den „Anzahlen“ gerechnet und der im Folgenden gemachte Vorschlag angenommen wird. Am häufigsten ist nämlich zu klagen über den nachlässigen, unrichtigen Gebrauch des Gleichheitszeichens. Mit Rücksicht hierauf möchte ich mir gestatten, folgenden Vorschlag zu machen: Man lasse bei der schriftlichen Ausführung der Division zunächst einen entsprechenden Zwischenraum zwischen dem Divisor und Quotienten und fülle diesen Zwischenraum schließlich statt mit dem Gleichheitszeichen mit dem Zeichen $\llcorner$ aus, wenn nicht der vollständige Quotient angegeben wird, sondern ein Rest bestehen bleibt. Z. B.

$$\begin{array}{lll} 1313 : 57 = 23\tfrac{2}{57}; & \text{aber} & 1313 : 57 \llcorner 23 \\ \;\;173 & & \;\;173 \\ \quad\;\, 2 & & \quad\;\, 2 \\ \quad\;\, 0 & & \end{array}$$

Ferner habe ich bei der mehrfach benannten Zahl, wenn das Fehlen von Einheiten einer Sorte angedeutet werden soll, statt des noch immer üblichen horizontalen Striches die Null benutzt, was der mathematischen Bezeichnungsweise angemessen ist und einer Verwechselung mit dem Minuszeichen ausweicht. (Vergleiche auch die Null in unserem Ziffernsysteme.)

16) Daß gleich anfangs der so wichtige, aber dem Schüler häufig bis in die oberen Klassen unklar bleibende Begriff der Einheit zum Verständnis gebracht wird, dürfte wohl Billigung finden.

17) Im Anhange ist von Münzen, Maßen etc. nur das gegeben, was unbedingt Eigentum des Schülers werden muß. Kurze erläuternde Bemerkungen sind dazu gegeben.

18) Einige kurze historische Notizen werden wohl willkommen sein.

19) Das Sextapensum beansprucht im Leitfaden ungefähr ebensoviel Raum, als Quinta- und Quartapensum zusammen. Der Grund hierfür liegt einerseits darin, daß der streng systematischen Darstellung halber Vieles hier Aufnahme finden mußte, was dem Schüler schon aus dem vorhergegangenen Unterrichte bekannt ist; andererseits aber ist die verhältnismäßige Kürze der folgenden Abschnitte dadurch bedingt, daß dieselben eben schon in dem Sextapensum ihre Begründung haben.

20) Schließlich sei es mir noch gestattet, einige vorläufige Andeutungen zu machen über die Principien, die der Aufgabensammlung zu Grunde liegen werden. Dieselbe wird im allgemeinen nur Aufgaben für das schriftliche Rechnen bringen. (Natürlich sollen aber diejenigen Aufgaben, die einer mündlichen Behandlung fähig sind, auch einer solchen unterzogen werden.)

Aufgaben wie: $\frac{2}{7} + \frac{3}{7} + \frac{1}{7}$ und dergl., die oft in wirklich abstoßender Zahl die Rechenbücher füllen, sind in der Sammlung nicht vorhanden; sie gehören in das Kopfrechnen. Will ein Lehrer schriftliche Uebungen nach dieser Richtung hin anstellen lassen, so gebe er eine bestimmte Anzahl von den Schülern selbstständig zu bildender Aufgaben der betreffenden Art für die nächste Stunde auf, und er wird samt den Schülern seine Freude daran haben.

Durch die den Aufgaben häufig beigefügten Verweise auf die entsprechenden §§ des Leitfadens wird dem Schüler eine wesentliche Hülfe geboten.

Bei den eingekleideten Aufgaben sind nur solche Verhältnisse berücksichtigt, deren volles Verständnis auf der betreffenden Altersstufe ohne Mühe zu erreichen ist.

Am Schlusse der größeren Abschnitte werden vermischte Aufgaben in hinreichender Zahl sich finden, unter ihnen nach dem Vorgange von Hentschel und Stubba in mäßiger Zahl eingekleidete Gleichungen, die sich für eine Behandlung durch einfaches Schlußverfahren eignen. Auf ein Fortschreiten vom Leichteren zum Schwereren ist dabei sorgfältig Bedacht genommen.

Von Münzen und Maßen fremder Länder wird nur dasjenige geboten werden, dessen Kenntnis für unser Kulturleben von Wichtigkeit ist. Desgleichen wird von veralteten deutschen Münzen und Maßen nur ein mäßiger Gebrauch gemacht werden.

Die Sammlung wird möglichst knapp bemessen sein. Die häuslichen Rechenaufgaben, die allerdings zur Erzielung einer tüchtigen Rechenfertigkeit nicht entbehrt werden können, sollten im allgemeinen nicht mehr als 15 Minuten in Anspruch nehmen; oft werden deshalb nur 1 oder 2 Aufgaben verlangt werden können. Bei strenger Gewöhnung an gewissenhaftes Arbeiten (wozu eine gute, saubere Schrift, auch in der Cladde, wesentlich gehört) kann hiermit sehr wohl Sicherheit und Gewandtheit im schriftlichen Rechnen erreicht werden.

Erster Abschnitt.

Die ganze Zahl.

A. Die einfach benannte Zahl. Die unbenannte Zahl ohne Rücksicht auf den Stellenwert der Ziffern.

a. Allgemeines.

§ 1.

Alles Rechnen beruht auf dem Zählen. Wenn man Dinge zählt, bedient man sich der Zahlen der sogenannten natürlichen Zahlenreihe: 1, 2, 3, 4, 5 u. s. w.

Anmerkung 1: Diese Zahlen heissen ganze Zahlen, im Gegensatze zu den gebrochenen Zahlen oder Brüchen (Siehe zweiten Abschnitt), und unbenannte Zahlen im Gegensatze zu den benannten Zahlen (§ 2).

Anmerkung 2: Die Null gilt auch als Zahl.

§ 2.

Ist zugleich der Name der gezählten Dinge angegeben, so erhalten wir eine benannte Zahl.

Beisp.: 4 Mark; 3 Aepfel; 8 Hunderter; 2 Einer; 3 Viertel; 7 Zehntel.

Bei 4 Mark heißt 4 die **Anzahl** der vorhandenen Dinge, das Wort „Mark" heißt die **Benennung** und jedes der vorhandenen Dinge, also 1 Mark, die **Einheit**.

Anmerkung 1: Die hier angeführten Zahlen heißen „einfach benannte" Zahlen, im Gegensatze zu den „mehrfach benannten" (Erster Abschnitt, Teil B).

Anmerkung 2: Statt Zahl sagt man auch Zahlengrösse.

Anmerkung 3: Die unbenannten Zahlen können auch als benannte aufgefaßt werden, z. B. 5 als 5 Einer, wo 1 Einer (= 1) die Einheit ist, oder als 1 Fünfer, wo 1 Fünfer (= 5) die Einheit ist; ferner 24 als 2 Dutzend; 30 als 3 Zehner oder 30 Einer oder 6 Fünfer u. s. w.

§ 3.

Zwei oder mehrere Zahlengrößen sind entweder gleichnamig (gleichbenannt),

z. B. 3 Bücher und 2 Bücher; 2 Drittel, 1 Drittel und 7 Drittel; 7 und 8 (§ 2, Anm. 3),

oder ungleichnamig (ungleich benannt),

z. B. 2 Tage und 9 Stunden; 3 Ganze und 4 Fünftel; 3 Zehner und 5 Einer; 4 Stunden und 7 Meilen.

§ 4.

Zwei oder mehrere ungleichnamige Zahlen sind gleichartig benannt, wenn sie sich in einander umrechnen lassen (Siehe Sortenverwandlung),

z. B. 3 Tausender und 4 Einer; 1 Viertel und 3 Achtel; 2 Minuten und 10 Sekunden;

dagegen ungleichartig benannt, wenn dies nicht geschehen kann,

z. B. 4 Mark und 5 Minuten; 6 Äpfel und 2 Birnen.

Aufgaben für §§ 1–4.

1) Gieb bei allen in den §§ 2–4 genannten Zahlengrößen Anzahl, Benennung, Einheit an.
2) Welche unbenannten Zahlen drücken dasselbe aus wie 5 Hunderter; 3 Dutzend; 7 Stück?
3) Betrachte bei 2 Schock Nüsse zuerst 2, dann 2 Schock als Anzahl und gieb in beiden Fällen Benennung und Einheit an.
4) Kann man Bäume und Steine beide mit der Benennung „Naturgegenstand" belegen?
5) Können in diesem Sinne Erwachsene und Knaben als gleichbenannt aufgefaßt werden? desgl. Tische und Bänke? Gieb dann die gemeinschaftlichen Benennungen an.
6) Wie kann man nach dem bisher Gelernten folgende Zahlengrößen nennen: 2 Menschen; 1 Hunderter; 1 Schock und 3 Schock; 2 Aepfel und 3 Birnen (Aufg. 5); 2 Mark und 7; 8 Stunden und 3 Minuten und 17 Sekunden; 2 Neuntel und 4 Neuntel; 2 Drittel und 5 Sechstel?

b. Erste Grundrechnungsart: Die Addition.[1]

§ 5.

Das Zeichen der Addition ist +, gelesen **plus**. Die Zahlen, welche addiert (summiert, zusammengezählt) werden sollen, heißen **Summanden, Addenden, Glieder,** Posten (letzter Ausdruck ist mehr kaufmännisch) und bilden, durch das Zeichen + verbunden, eine **Summe.** (Vergl. § 11.)

Beisp.: 4 + 3; 3 Äpfel + 1 Apfel + 2 Äpfel; 1 Achtel + 5 Achtel; 4 ℳ + 50 ₰; 5 *H* + 3 *E*.

§ 6.

Soll eine Summe ausgerechnet werden, so müssen die Summanden, wenn sie ungleichnamig sind, erst gleichnamig gemacht werden. (Siehe Sortenverwandlung.)

§ 7.

Aufgabe: 8 Äpfel + 5 Äpfel auszurechnen.

Lösung: Man zählt vom ersten Summanden (8 Äpfel) aus so viele Einheiten (§ 2) weiter, als der zweite Summand (5 Äpfel) enthält und kommt so auf die Zahl 13 Äpfel, welches die ausgerechnete Summe ist. Also ist 8 Äpfel + 5 Äpfel = 13 Äpfeln.

Anmerkung: Ungleichartige Zahlen (§ 4) können also keine Summe bilden.

Aufgabe: In welchem Sinne könnte man jedoch auch 6 Eichen und 3 Buchen addieren? Gieb das Resultat an.

§ 8.

Das Addieren beruht also auf dem Zählen.

Anmerkung: Durch viele Übungen im Zählen wissen wir längst die Summe kleinerer Zahlen auswendig (z. B. 8 + 9 = 17), und das Verfahren für das Addieren größerer Zahlen haben wir auch gelernt. Deshalb wäre es jetzt für uns unangemessen und unpraktisch, durch wirkliches Zählen (etwa mit Hülfe der Finger) zu addieren. (Gebrauch der Finger zum Rechnen bei Naturvölkern und überhaupt bei des Rechnens Unkundigen.)

Dasselbe gilt für die 3 andern Grundrechnungsarten.

[1]) Die 4 Grundrechnungsarten nennt man auch die 4 Species oder Grundoperationen.

§ 9.

Wenn die Summanden gleichnamig sind, so braucht man nur mit den Anzahlen (§ 2) derselben zu rechnen. Man muß natürlich dem Resultate die Benennung wieder beigeben.

§ 10.

Die Reihenfolge der Summanden ist gleichgültig.

Beisp.: 3 + 5 + 8 = 8 + 3 + 5 = 3 + 8 + 5 u. s. w.

Beweis: In jedem Falle sind, wenn man die Summe ausrechnet, alle vorhandenen Einheiten, nicht mehr und nicht weniger, gezählt.

Aufgaben: Addiere bequem: 27 + 18 + 3; 2 + 36 + 18; 99 + 37 + 1; 291 + 23 + 9 + 15 + 7.

§ 11.

Das Wort „Summe" wird in zwei verschiedenen Bedeutungen gebraucht. Es kann 1) die Form einer Addition (unausgerechnete Summe) bezeichnen, z. B. 7 + 9, 2) das Resultat einer Addition (ausgerechnete Summe), z. B. 16 als Summe von 7 und 9.

Dem entsprechend hat auch das Wort „Addieren" zwei verschiedene Bedeutungen.
Dasselbe gilt für die 3 andern Grundrechnungsarten.

§ 12.

Wenn man mit der Form von Summen rechnet, z. B. sie zu andern Zahlen addiert, so schließt man die Summe in eine **Klammer** ( ), oder [ ], oder { } ein. Man denkt sich hierbei das in die Klammer Eingeschlossene als **eine** Zahl, nämlich als ausgerechnete Summe.

Beisp.: (9 + 8) + (2 + 4 + 1) + 5 ist eine Summe von 3 Summanden.

Aufgaben:

1) Nenne die Summanden der obigen Summe, erst unausgerechnet, dann ausgerechnet. Gieb das Endresultat an.
2) Behandle ebenso: 11 + (17 + 3) + 9 + (28 + 2)
3) Desgl. (52 + 37 + 8 + 3) + (187 + 26 + 13).
4) Drücke in Form einer Summe aus, daß man a) 41 zur Summe von 17 und 13; b) die Summe von 12 und 3 und 5 zu 50 addieren soll.
5) Kann man für 3 ℳ + 5 ℳ auch schreiben (3 + 5) ℳ? Dürfte man auch schreiben 3 + 5 ℳ?

§ 13.

Statt eine Summe auf einmal zu einer Zahl zu addieren, kann man auch die Summanden einzeln in beliebiger Reihenfolge addieren.

Beisp.: 13 + (7 + 17 + 2) = 13 + 7 + 17 + 2 = 13 + 17 + 7 + 2 u. s. w.

Beweis: Derselbe wie in § 10.

Aufgaben: Berechne hiernach bequem: 57 + 43 (bedenke, daß 43 = 40 + 3 ist); 28 + 22; 216 + 84; 86 + 14.

§ 14.

Man kann die Summanden in beliebigen Gruppen (schriftlich durch Klammern anzudeuten) **zusammenfassen und dann addieren.**

Beisp.: 3 + 7 + 16 + 4 = (3 + 7) + (16 + 4) = 16 + (7 + 3 + 4) u. s. w.

Beweis: Derselbe wie in § 10.

§ 15.

Die Probe der Addition macht man gewöhnlich, indem man die Summanden noch einmal in anderer Reihenfolge addiert.

Über die Subtraktionsprobe siehe § 21, Anm. 2.

c) Zweite Grundrechnungsart: Die Subtraktion.

§ 16.

Das Zeichen der Subtraktion ist —, gelesen **minus**. Die Zahl, von welcher eine zweite subtrahiert (abgezogen) werden soll, heißt **Minuendus**, die zweite **Subtrahendus**. Beide bilden, durch das Zeichen — verbunden, eine **Differenz**. (Vergl. § 11.)

Beisp.: 6 — 4; 18 Tage — 7 Tage; 9 Elftel — 2 Elftel; 3 *Z* — 7 *E*; 1 — 6 *z*.

Anmerkung 1: Minuend und Subtrahend heißen auch Glieder der Differenz.

Anmerkung 2: Das in § 6 für die Addition Gesagte gilt auch für die Subtraktion.

§ 17.

Aufgabe: 12 ℳ — 3 ℳ auszurechnen.

Lösungen:

a) Man zählt von 12 ℳ aus so viele Einheiten (§ 2) zurück, als 3 ℳ enthält. Die erhaltene Zahl 9 ℳ ist die ausgerechnete Differenz.

b) Man zählt von 12 ℳ aus so viele Einheiten zurück, bis man auf 3 ℳ stößt. Die zurückgezählten Einheiten (9 ℳ im ganzen) bilden die ausgerechnete Differenz.

c) Man zählt von 3 ℳ aus so viel Einheiten weiter, bis man 12 ℳ erhält. Die hinzugezählten Einheiten (9 ℳ im ganzen) bilden die ausgerechnete Differenz.

In jedem Falle haben wir als Resultat erhalten: 12 ℳ — 3 ℳ = 9 ℳ.

Aufgabe: Welche dieser 3 Verfahrungsweisen ist beim Geldherausgeben in den Verkaufsläden üblich?

§ 18.

Das Subtrahieren beruht also auch auf dem Zählen. (Vergl. § 8.)

Anmerkung: Das in § 9 von der Addition Gesagte gilt auch für die Subtraktion.

§ 19.

1) Ist der Subtrahend gleich dem Minuend, so ist die Differenz = 0 (z. B. 9 — 9 = 0); ist er größer, so ist die Subtraktion für uns auf dieser Stufe nicht ausführbar.

2) Addition und Subtraktion derselben Zahl heben sich auf (z. B. 7 + 3 — 3 = 7). Man sagt deshalb, Addition und Subtraktion sind entgegengesetzte Operationen.

§ 20.

Die in § 17 enthaltenen 3 Lösungen ergeben der Reihe nach folgende 3 Beziehungen:

a) **Minuend — Subtrahend = Differenz.**

b) **Minuend — Differenz = Subtrahend.**

c) **Subtrahend + Differenz = Minuend.**

§ 21.

Aus § 20 c) entnehmen wir folgende wichtige Erklärung der Subtraktion: **„Von einer Zahl eine zweite subtrahieren heißt, eine dritte finden, welche, zur zweiten addiert, die erste giebt".**

Anmerkung 1: Hierin liegt die wichtigste Probe für die Subtraktion, nämlich die sogenannte **Additionsprobe**. Beisp.: 15 — 7 = 8. Probe: 7 + 8 = 15.

Anmerkung 2: Ebenso kann man für die Addition die Subtraktionsprobe machen (§ 15). Beisp.: 7 + 6 = 13. Probe: a) 13 — 6 = 7; b) 13 — 7 = 6.

Aufgaben:

Löse folgende Aufgaben und gieb bei jeder derselben an, welche Subtraktion dabei auszuführen ist:

1) Welches ist der Unterschied (Differenz) von a) 8 und 5; b) 8 ℳ und 5 ℳ; c) 8 Neunteln und 5 Neunteln; d) 8 Fünfern und 5 Fünfern?
2) Um wieviel ist a) 10 größer als 7; b) 9 *T* größer als 2 *T*; c) 3 Achter größer als 1 Achter; d) 1 größer als 3 Siebentel (mache erst gleichnamig).
3) Um wieviel ist a) 4 kleiner als 13; b) 1 Dutzend kleiner als 15 Stück; c) 9 *Z* kleiner als 18 *Z*; d) 3 Zweier kleiner als 10 Zweier?
4) Welche Zahl ist a) um 6 kleiner als 9; b) um 7 kleiner als 2 *Z*; c) um 4 Sechser kleiner als 7 Sechser?
5) Wieviel muß man hinzulegen a) zu 76, um 80 zu erhalten; b) zu 5 Vierteln, um 9 Viertel zu erhalten?
6) Um wieviel muß man vermindern a) 22 Minuten, um 15 Minuten zu erhalten; b) 13 Achtel, um 1 Achtel zu erhalten?
7) Stelle 10 in Form einer Differenz dar, deren Minuendus a) 20; b) 100; c) 4 Siebener ist.
8) Stelle 27 als Summe zweier Zahlen dar, von denen die eine a) 2; b) 12; c) 1 *Z* ist.
9) Mache bei allen diesen Exempeln die Additionsprobe.

§ 22.

Das in §§ 11 und 12 über die Addition Gesagte gilt auch für die Subtraktion.

Aufgaben:

1) (18 + 5) — (40 — 37) ist eine Differenz. Nenne die Glieder, rechne dieselben einzeln aus und gieb das Resultat an.
2) Bilde die Form einer Differenz, deren Minuend 19 — 3, und deren Subtrahend 7 + 4 ist. Gieb dann die ausgerechnete Differenz an.
3) Welche Form hat der Ausdruck: (17 — 4) ℳ + 5 ℳ? Gieb die Glieder desselben und dann das Resultat an.

§ 23.

Statt eine Summe auf einmal zu subtrahieren, kann man auch die Summanden einzeln in beliebiger Reihenfolge subtrahieren.

Beisp.: 13 — (6 + 2 + 3 + 1) = 13 — 3 — 1 — 2 — 6.

Beweis: Man subtrahiert in beiden Fällen alle in der Summe vorhandenen Einheiten, nicht mehr und nicht weniger.

Aufgaben: 1) 50 — 17 (bedenke, daß 17 = 10 + 7 ist); 2) 57 — 8; 3) 70 — 22; 4) 1008 — 558.

§ 24.

Statt mehrere Zahlen einzeln zu subtrahieren, kann man auch ihre Summe auf einmal subtrahieren.

Beisp.: 13 — 3 — 1 — 2 — 6 = 13 — (3 + 1 + 2 + 6) (Siehe § 23)

Beweis: Derselbe wie in § 23.

Aufgaben: 1) 100 — 37 — 3; 2) 87 — 28 — 2; 3) 67 — 32 — 6 — 2.

§ 25.

Statt eine Differenz zu einer Zahl zu addieren, kann man auch den Minuend addieren und den Subtrahend subtrahieren.

Beisp.: 18 + (40 — 3) = 18 + 40 — 3.

Beweis: (40 — 3) ist um 3 kleiner als 40. Addiere ich also 40 zu 18, so habe ich 3 zuviel hinzu gezählt, muß also diese 3 dann wieder zurückzählen.

Aufgaben: 1) 16 + 29 (bedenke, daß 29 = 30 — 1 ist); 2) 77 + 18; 3) 35 + 9; 4) 715 + 997.

§ 26.

Statt eine Differenz von einer Zahl zu subtrahieren, kann man auch den Minuend subtrahieren und den Subtrahend addieren.

Beisp.: 35 — (20 — 2) = 35 — 20 + 2.

Beweis: (20 — 2) ist um 2 kleiner als 20. Subtrahiere ich also 20 von 35, so habe ich 2 zuviel zurückgezählt, muß also die 2 wieder hinzuzählen.

Aufgaben: 1) 56 — 19 (bedenke, daß 19 = 20 — 1 ist); 2) 77 — 18; 3) 23 — 9.

§ 27.

Man kann Zahlen in beliebiger Reihenfolge addieren und subtrahieren.

Bemerkung: Natürlich darf dabei eine Zahl, die addiert werden soll, nicht subtrahiert werden, und umgekehrt.

Beisp.: 19 + 16 — 3 — 9 + 4 = 19 — 9 + 16 + 4 — 3 = 16 + 4 + 19 — 3 — 9 u. s. w.

Beweis: In jedem Falle sind alle Einheiten, welche addiert werden sollen, addiert worden und alle Einheiten, welche subtrahiert werden sollen, subtrahiert worden.

Anmerkung: Beim schriftlichen Rechnen berechnet man am besten zuerst die Summe aller Zahlen, die zu addieren sind. Hiervon zieht man dann die Summe (§ 24) aller der Zahlen ab, die zu subtrahieren sind.

d) Dritte Grundrechnungsart: Die Multiplikation

§ 28.

Das Zeichen der Multiplikation ist ein **Punkt**, gelesen **mal**. Diejenige Zahl, welche multipliziert (vervielfacht) werden soll, heißt **Multiplikandus**, die andere Zahl, mit welcher man multipliziert, heißt **Multiplikator**. Beide bilden, durch einen Punkt verbunden, ein **Produkt**. (Vergl. § 11.)

Wir wollen in diesem Kapitel den Multiplikator immer voranstellen.

Beisp.: 3 . 7; 4 . 5 ℳ; 2 . 1 Apfel; 3 . 7 Achtel; 1 . 1 *Z*.

Anmerkung: Die Glieder eines Produktes heißen **Faktoren**. Es können auch mehr als 2 Faktoren vorhanden sein.

§ 29.

Ein Produkt wird ausgerechnet, indem man den Multiplikand so oft als Summand setzt, als der Multiplikator anzeigt.

Aufgabe: 4 . 5 ℳ auszurechnen.

Lösung: 4 . 5 ℳ = 5 ℳ + 5 ℳ + 5 ℳ + 5 ℳ = 20 ℳ.

Anmerkung 1: Statt „4 mal 5 ℳ" sagt man auch „das 4fache von 5 ℳ"; statt „2 mal 7" auch „das Doppelte von 7" oder „das Zweifache von 7".

Anmerkung 2: Der **Multiplikator** muß immer **unbenannt** sein, denn er giebt ein „wie oft" an.

Aufgaben:

1) Hat 4 ℳ . 5 ℳ einen Sinn?
2) In welchem Sinne kann jedoch 2 Dutzend als Multiplikator auftreten, oder 3 *Z*? (Vergl. § 2, Anm. 3; bedenke auch, daß man sagt: Ich habe etwas „zweidutzendmal" gethan.)
3) Wieviel *H* giebt 2 *Z* . 4 *H*?

§ 30.

Das Multiplizieren ist also ein **Addieren** gleicher Summanden, **beruht also auch auf dem Zählen.** (Vergl. §§ 8 und 18.)

§ 31.

1) Multiplikation mit 1 verändert den Wert nicht. Der Faktor 1 kann also beliebig hinzugeschrieben oder weggelassen werden.
   Beisp.: 1 . 7 = 7.
2) Wenn ein oder mehrere Faktoren gleich 0 sind, so ist der Wert des Produktes auch 0.
   Beisp.: 0 . 4 Stunden = 0 Stunden = 0; 9 . 0 = 0; 0 . 0 = 0.

§ 32.

Multiplikator und Multiplikandus können, wenn beide unbenannt sind, **mit einander vertauscht werden.**

Beisp.: 2 . 4 = 4 . 2.

Beweis: 1 + 1 + 1 + 1
1 + 1 + 1 + 1

Zähle ich alle hier vorhandenen Einheiten erst in wagerechten Reihen, so erhalte ich 4 + 4, also 2 . 4; zähle ich dieselben aber in senkrechten Reihen, so erhalte ich 2 + 2 + 2 + 2, also 4 . 2. Demnach ist 2 . 4 = 4 . 2.

Aufgaben: Beweise ebenso, daß 1) 6 . 7 = 7 . 6; 2) daß 3 . 5 Äpfel = 5 . 3 Äpfel ist.

§ 33.

Aus § 29 folgt, daß man das **Produkt als benannte Zahl** auffassen kann.

z. B. 4 . 5 ℳ als 4 Fünfmarkstücke; 7 . 10 als 7 *Z*; 3 . 12 als 3 Zwölfer (3 Dutzend); 2 . 7 als 2 Siebener.

Anmerkung: Der Multiplikator liefert die Anzahl, der Multiplikandus Benennung und Einheit (§ 2). (Allerdings sind dabei die Benennungen mündlich meist nicht gut auszudrücken.)

Man kann mit Produkten genau ebenso wie mit allen anderen benannten Zahlen rechnen.

Aufgaben:

1) Gieb in diesem Sinne Anzahl, Benennung, Einheit an für die in § 28 genannten Produkte.
2) 5 Dutzend + 2 Dutzend; 5 . 12 + 2 . 12 = wievielmal 12? (Beachte bei dieser und den folgenden Aufgaben § 34 Anm.) 9 Achter + 1 Achter; 7 . 9 — 2 . 9; 76 . 52 — 75 . 52.
3) Das 11 fache von 7 + das 9 fache von 7; das 10 fache von 29 — das 8 fache von 29.
4) 6 . 2 *H*; 11 . 3 Zweier; 10 (3 . 9) = wievielmal 9? Entsprechend: 5 (4 . 13); 2 (5 . 8); 5 mal das Doppelte von 6.
5) (9 + 2) Dutzend = 9 Dutzend + 2 Dutzend. Drücke entsprechend aus: (9 + 2) 12; (15 — 2) 4; (10 + 2) (10 + 7), wo (10 + 7) als Benennung gilt. Antw.: 10 (10 + 7) + 2 (10 + 7); (300 + 20 + 5) (10 + 5).
6) (3 . 8) *Z* = 3 . 8 *Z* oder = 8 . 3 *Z* (§ 32); (4 . 3) 5 = 4 (3 . 5), also 4 . 15, oder 3 (4 . 5), also 3 . 20. Entsprechend: (7 . 15) 2; (20 . 9) 5.
7) 8 (4 . 5) = 32 . 5 oder = 40 . 4. (Nach § 32 sind 4 Fünfer = 5 Vierern.) Entsprechend: 6 (7 . 5); 2 (5 . 17); 5 . 28 (bedenke, daß 28 = 4 . 7 ist); 8 . 35; 12 . 15.

§ 34.

Das in §§ 11 und 12 über die Addition Gesagte gilt auch für die Multiplikation. Jedoch läßt man die Klammer um ein Produkt weg, wenn dasselbe mit andern Zahlengrößen durch die Zeichen plus oder minus verbunden ist. Das Produkt wird dabei als in eine Klammer eingeschlossen betrachtet.

Anmerkung: Neben einer Klammer läßt man das Multiplikationszeichen gewöhnlich weg.

Aufgaben:

1) 3 (2 . 6) ist ein Produkt. Nenne die 2 Faktoren desselben. Welche Form hat der zweite Faktor, für sich betrachtet? Rechne denselben aus und gieb dann das Endresultat an.
2) Berechne (5 + 7) 8; 5 + 7 . 8; 3 . 10 + 5 . 2; 20 — 8 . 2.
3) 2 + 3 . 3 + 2 (6 + 7) + (4 + 1) 3. Nenne die Glieder dieser Summe, berechne dieselben und addiere sie.
4) Weshalb darf man bei 3 . 7 den Punkt nicht weglassen?

§ 35.

Eine Summe kann man multiplizieren, indem man die Summanden einzeln multipliziert.

Beisp.: $3\,(10 + 7) = 3 \cdot 10 + 3 \cdot 7$.

Beweis:
$$\begin{aligned} 3\,(10+7) &= 10 + 7 \\ &\;\;\,+ 10 + 7 \\ &\;\;\,+ 10 + 7 \\ \hline &= 3 \cdot 10 + 3 \cdot 7 \end{aligned}$$

Anmerkung: Die Reihenfolge ist hierbei gleichgültig (§ 10).

Aufgaben:

1) Berechne auf dieselbe Weise: 9 (10 + 9); 4 (100 + 20 + 1); 20 (400 + 40 + 7); 7 . 16 (setze 16 = 10 + 6); 3 . 27; 4 . 107.
2) (10 + 3) (10 + 2) (denke dabei an Aufg. 5 in § 33 und wende dann erst § 35 an). Behandle ebenso: (20 + 1) (10 + 4); (10 + 9) (100 + 5).

§ 36.

Eine Differenz kann man multiplizieren, indem man die Glieder derselben einzeln multipliziert.

Beisp.: $3\,(30 - 1) = 3 \cdot 30 - 3 \cdot 1$.

Beweis:
$$\begin{aligned} 3\,(30-1) &= 30 - 1 \\ &\;\;\,+ 30 - 1 \\ &\;\;\,+ 30 - 1 \\ \hline &= 3 \cdot 30 - 3 \cdot 1 \end{aligned}$$

Aufgaben: 4 (20 — 2); 12 (100 — 1); 8 . 49 (setze 49 = 50 — 1); 7 . 999; 15 . 9; 3 . 197.

§ 37.

Wir haben in §§ 32 und 33 gelernt, daß man bei einem Produkte von 2 und 3 Faktoren in beliebiger Reihenfolge multiplizieren kann. Dasselbe gilt auch für noch mehr Faktoren.

Z. B.: 4 . 7 . 5 . 3 = 4 . 5 . 7 . 3 = 20 . 21 = 420; 12 . 8 . 5 . 5 = 8 . 5 . 12 . 5 = 40 . 60 = 2400.

Aufgaben: Berechne bequem: 5 . 3 . 6 . 4 . 5; 7 . 5 . 5 . 2 . 2 . 3.

Anmerkung: Unter den Faktoren eines Produktes darf nur einer benannt sein. Das ausgerechnete Produkt hat dann dieselbe Benennung.

e) Die Potenz.

§ 38.

Eine Potenz ist ein Produkt gleicher Faktoren. Man bedient sich dafür einer kürzeren Schreib- und Bezeichnungsweise. Z. B. für 3 . 3 . 3 . 3 schreibt man $\mathbf{3^4}$ und nennt diesen Ausdruck **„die 4te Potenz von 3"**.

Man sagt auch: „3 zur 4ten Potenz", oder kurz „3 zur 4ten", oder „3 hoch 4"; 3^2 liest man auch: „3 in's Quadrat" oder kurz „3 Quadrat".

Bei 3^4 heißt 3 die **Basis**, 4 der **Exponent**, welcher angiebt, wie oft die Basis als Faktor zu setzen ist.

Anmerkung 1: Die Zahl 1 kann als Exponent beliebig hinzugeschrieben oder weggelassen werden.
Beisp.: $10 = 10^1$; $5^1 = 5$.

Anmerkung 2: Ist die Basis = 1, so ist der Wert der Potenz auch = 1.
Beisp.: $1^4 = 1$; $1^{20} = 1$.

Ist die Basis = 0, so ist der Wert der Potenz auch = 0.
Beisp.: $0^5 = 0$.

Aufgaben:

1) Lies, schreib als Produkt und rechne aus folgende Ausdrücke: 4^2; 3^3; 10^1; 10^2; 10^3; 10^4; 1^6; 1^1; 0^3.
2) Schreib und lies in Potenzform: 4 . 4 . 4; 10 . 10 . 10 . 10 . 10; 25; 64.
3) Weshalb muß die Basis immer unbenannt sein?

Das Potenzieren bezieht sich nur auf die Zahl, neben welcher der Exponent steht. Soll es sich auf einen zusammengesetzten Ausdruck, z. B. eine Summe, beziehen, so muß man diesen Ausdruck in eine Klammer einschließen.

Aufgaben: Berechne: $(2 + 3)^2$; $2 + 3^2$; $(2 \cdot 3)^2$; $2 \cdot 3^2$; $3^2 \cdot 4^1$; $(10 - 3^2)^3$; $(12 - 2 \cdot 4 + 14 - 4^2)^4$; $2 \cdot 5 + 2^5$.

f. Vierte Grundrechnungsart: Die Division.

§ 39.

Das Zeichen der Division ist :, oder ——, gelesen „dividiert durch“ oder nur „**durch**“.

Diejenige Zahl, welche dividiert werden soll, heißt **Dividendus**, die zweite Zahl, durch welche man dividiert, **Divisor**. Beide bilden, durch das Divisionszeichen verbunden, einen **Quotienten**. (Vergl. § 11.)

Bemerkung: Der Dividendus steht immer vor dem Zeichen : oder über dem Zeichen ——.
Beisp.: 24 Äpfel : 8; 24 Äpfel : 8 Äpfel; 24 : 8;
oder $\frac{24 \text{ Äpfel}}{8}$; $\frac{24 \text{ Äpfel}}{8 \text{ Äpfel}}$; $\frac{24}{8}$.

Anmerkung: Statt 24 durch 8 sagt man auch: 8 **in** 24. Lies die beiden andern Beispiele auf diese Art.

§ 40.

1) Es giebt 2 Arten der Division, nämlich das wirkliche Teilen und das Messen (§ 41).
2) Bei der Division können 2 Fälle eintreten; entweder sie geht auf, oder sie geht nicht auf.

I. Die Division geht auf.

§ 41.

A. Das wirkliche Teilen.

Man soll aus dem Dividendus so viel gleiche Teile bilden, als der Divisor angiebt. Ein solcher Teil ist der gesuchte Quotient.

Aufgabe: 24 Äpfel : 8 auszurechnen.

Lösung: Man soll hier aus 24 Äpfeln 8 gleiche Apfelhaufen bilden. Zu diesem Zwecke nimmt man von den 24 Äpfeln so oft 8 Äpfel (nämlich für jeden Apfelhaufen jedesmal einen) weg, als dies möglich ist. So oft dieses Wegnehmen geschehen kann, so viele Äpfel liegen dann auf jedem Haufen, in unserem Falle 3 Äpfel. Diese 3 Äpfel bilden also den ausgerechneten Quotienten.

Aufgaben: Berechne auf dieselbe Art: 1) 24 : 8; 2) 3 ℳ : 3; 3) 3 : 3.

Anmerkung 1: Beim wirklichen Teilen muß der Divisor immer unbenannt sein, denn er giebt ja die Anzahl der Teile an.

Anmerkung 2: Ist der Dividendus benannt, so hat der Quotient dieselbe Benennung.

B. Das Messen.

Man soll angeben, wie oft der Divisor im Dividendus enthalten ist.

Aufgabe: 24 Äpfel : 8 Äpfel auszurechnen.

Lösung: Man nimmt von den 24 Äpfeln 8 Äpfel so oft weg, als dies möglich ist, hier also 3 mal. Die Zahl 3 ist also der ausgerechnete Quotient.

Aufgaben: Berechne auf dieselbe Art: 1) 24 : 8; 2) 5 Achtel : 5 Achtel; 3) 5 : 5.

Anmerkung 1: Beim Messen müssen also Dividendus und Divisor entweder beide benannt (und zwar gleichartig benannt) oder beide unbenannt sein.

Anmerkung 2: Zum Zwecke der Ausrechnung müssen Dividendus und Divisor, wenn sie ungleichnamig sind, erst gleichnamig gemacht werden. (Vergl. das Addieren und Subtrahieren § 6.)

Anmerkung 3: Beim Messen ist der Quotient immer unbenannt, da er ein „wie oft“ angiebt.

Anmerkung 4: Bei unbenanntem Dividendus und Divisor kann die Division sowohl ein wirkliches Teilen als auch ein Messen bedeuten.

§ 42.

Die Division beruht (nach § 41 A und B) **auf dem Subtrahieren, also auch auf dem Zählen** (Vergl. §§ 8 und 18).

§ 43.

Aus § 41 ergeben sich für jede Division folgende 3 Beziehungen (vergl. § 20):

a) **Dividend : Divisor = Quotient.**
a) **Dividend : Quotient = Divisor.**
c) **Quotient . Divisor = Dividend.**

§ 44.

Aus § 43 c) entnehmen wir folgende wichtige Erklärung der Division: „**Eine Zahl durch eine zweite dividieren heißt eine dritte finden, welche, mit der zweiten durch Multiplikation verbunden, die erste giebt**“. (Vergl. § 21.)

Anmerkung 1: Hierin liegt die wichtigste Probe für die Division, nämlich die sogenannte **Multiplikationsprobe.** Beisp.: 1) 24 Äpfel : 8 = 3 Äpfel. Probe: 8 . 3 Äpfel = 24 Äpfel; 2) 24 Äpfel : 8 Äpfel = 3. Probe: 3 . 8 Äpfel = 24 Äpfeln.

Anmerkung 2: Ebenso kann man für die Multiplikation die Divisionsprobe machen.
Beisp.: 8 . 4 = 32. Probe: a) 32 : 8 = 4; b) 32 : 4 = 8.

§ 45.

Wenn man den 8ten Teil einer Zahl mit 8 multipliziert, oder das 8fache einer Zahl durch 8 dividiert, so erhält man wieder die ursprüngliche Zahl. Multiplikation und Division durch dieselbe Zahl heben sich also auf; man sagt deshalb, Multiplikation und Division sind entgegengesetzte Operationen.

Aufgaben: 3 (30 ℳ : 3); $\frac{6 \cdot 18 \text{ Tage}}{6}$; (10 . 11) : 10.

§ 46.

1) Division durch 1 verändert den Wert nicht. Der Divisor 1 kann also beliebig hinzugeschrieben oder weggelassen werden.
   Beisp.: 4 Dutzend : 1 = 4 Dutzend; $9 = \frac{9}{1}$.
2) Jede Zahl, durch sich selbst dividiert, giebt 1.
   Beisp.: 7 : 7 = 1; 5 Achtel : 5 Achtel = 1.
3) Ist der Dividendus = 0, so ist der Quotient auch = 0.
   Beisp.: 0 : 3 = 0.
4) Division durch 0 hat für uns noch keinen Sinn, wird also jetzt ausgeschlossen.

§ 47.

Bei beiden Arten der Division braucht man, wenn benannte Zahlen vorkommen, nur mit den Anzahlen zu rechnen.

Beachte dabei aber § 41, *A*, Anm. 2 und § 41, *B*, Anm. 2.

Aufgaben:

Löse folgende Aufgaben und gieb bei jeder derselben an, welche Division dabei auszuführen ist:

1) Wie oft kann man wegnehmen a) 8 ℳ von 32 ℳ; b) 8 Fünftel von 32 Fünfteln; c) 8 von 32?
2) Wie oft muß man als Summand setzen a) 10 Stunden, um 50 Stunden zu erhalten? b) 10, um 50 zu erhalten?
3) Gieb an den dritten Teil (1 Dritteil oder Drittel) von a) 15 Äpfeln; b) 15.
4) Gieb an die Hälfte von a) 20 ℳ; b) 20; c) 4 Neunteln.
5) Wie oft sind enthalten a) 7 Monate in 28 Monaten; b) 7 in 28; c) 3 *H* in 9 *H*; d) 2 Viertel in 10 Vierteln.
6) Dividiere a) mit 9 *Z* in 18 *Z*; b) mit 9 in 18; c) mit 9 in 18 Minuten.
7) Der Dividendus sei 22 Meter, der Divisor a) 2 Meter; b) 2. Wie heißt der Quotient?
8) Der Dividendus sei 48 ℳ, der Quotient a) 8 ℳ; b) 8. Wie heißt der Divisor?
9) Mit welcher Zahl muß man multiplizieren a) 6 Häuser, um 18 Häuser zu erhalten; b) 6, um 18 zu erhalten?
10) Welche Zahl muß man mit 9 multiplizieren, um a) 36 Stunden; b) 36; c) 9 Elftel zu erhalten?
11) Ein Faktor eines zweigliedrigen Produktes ist 9. Das Produkt selbst ist a) 63; b) 63 Dutzend. Welches ist der andere Faktor?
12) 50 Bücher darzustellen als ein Produkt von 2 Faktoren, von denen der eine a) 5; b) 5 Bücher ist.
13) a) 16 Äpfel sind wievielmal soviel als 2 Äpfel?
    b) 16 ist „ „ „ 2?
14) a) 27 ₰ sind das Wievielfache von 3 ₰?
    b) 27 ist „ „ „ 3?
15) a) 3 Jahre sind der wievielte Teil von 12 Jahren?
    b) 3 ist „ „ „ „ 12?
16) Durch welche Zahl muß man 24 Äpfel dividieren, um a) 3; b) 8; c) 3 Äpfel; d) 8 Äpfel zu erhalten?
17) Wie oft ist der 6. Teil einer Zahl in der Zahl selbst enthalten?
18) Wie oft muß man den 8. Teil einer Zahl nehmen, um a) die Zahl selbst; b) das 5fache; c) die Hälfte derselben zu erhalten?
19) Was giebt eine Zahl, dividiert durch ihren 10. Teil?
20) Das Wievielfache einer Zahl erhält man, wenn man das 12fache derselben durch 2 dividiert?
21) Was giebt das 20fache einer Zahl, durch das 5fache derselben dividiert?
22) Gieb bei vorstehenden Aufgaben an, wo ein wirkliches Teilen und wo ein Messen zu Grunde liegt, und mache die Multiplikationsprobe.

§ 48.

Das in §§ 11 und 12 über die Addition Gesagte gilt auch für die Division. Jedoch läßt man die Klammer weg, wenn der Quotient mit andern Zahlengrößen durch die Zeichen plus oder minus verbunden ist. Der Quotient wird hierbei als in eine Klammer eingeschlossen betrachtet. (Vergl. § 34.)

Anmerkung: Wenn man den wagerechten Strich als Divisionszeichen anwendet, so ist die Klammer meist überflüssig (Vergl. jedoch § 38 über die Klammer).

Aufgaben:

1) $\frac{27}{9} \cdot 4\ (6:2)$ ist ein Produkt. Nenne die 3 Faktoren. Welche Form hat der 1. und der 3. Faktor? Rechne erst diese beiden Faktoren aus und gieb dann das Endresultat an.
2) $(60:10):(8:4)$ ist ein Quotient. Nenne Dividendus und Divisor und gieb dann das Endresultat an.
3) $(12:3)\,4 + (5-3):2$ ist eine Summe. Berechne die beiden Summanden und addiere sie dann.
4) Berechne: a) $(15+5):5$; b) $15+5:5$; c) $\frac{15+5}{5}$; d) $14:7:2+21:3-2$.
5) Berechne: a) $\frac{\frac{40}{4}}{2}$; b) $\frac{40}{\frac{4}{2}}$; c) $100:10:2$; d) $100:(10:2)$.

§ 49.

Eine Summe kann man dividieren, indem man die Summanden einzeln dividiert.

Beisp.: $(30+6):3 = 30:3+6:3$.

Beweis durch die Multiplikationsprobe (§ 44, Anm. 1). Denke dabei an §§ 35 und 45.

Aufgaben: 1) $(40+8):4$; $(160+16):16$; $(600+12):6$. 2) $125:5$ (stelle 125 als eine Summe dar, deren Summanden sich bequem durch 5 dividieren lassen, $125 = 100 + 25$). Behandle ebenso: $84:4$; $226:2$; $6312:3$; $198:18$; $187:17$.

§ 50.

Eine Differenz kann man dividieren, indem man die Glieder derselben einzeln dividiert.

Beisp.: $(80-4):4 = 80:4-4:4$.

Beweis durch die Multiplikationsprobe (§ 44, Anm. 1). Denke dabei an §§ 36 und 45.

Aufgaben: 1) $(500-5):5$; $(160-8):4$; $(9000-6):3$. 2) $792:8$ (stelle 792 als eine Differenz dar, deren Glieder sich bequem durch 8 dividieren lassen, $792 = 800 - 8$). Behandle ebenso: $396:4$; $882:9$; $3992:4$; $1485:15$.

§ 51.

Ein Produkt kann man dividieren, indem man nur einen Faktor desselben dividiert.

Beisp.: $(9 \cdot 18):3 = (9:3)\,18$ oder $= (18:3)\,9$.

Beweis durch die Multiplikationsprobe (§ 44, Anm. 1).

Anmerkung: Ein anderer Beweis ergiebt sich, indem man nach § 32 $9 \cdot 18$ auffaßt als 9 Achtzehner oder als 18 Neuner. Vergl. § 33.

Aufgaben: $(28 \cdot 5):7$; $(11 \cdot 21):3$; $(12 \cdot 5 \cdot 6):6$.

§ 52.

Statt durch ein Produkt zu dividieren, kann man auch durch die einzelnen Faktoren nach einander in beliebiger Reihenfolge dividieren.

Beisp.: $36:(3 \cdot 4) = (36:4):3$.

Beweis durch die Multiplikationsprobe (§ 44, Anm. 1). Nämlich das 3fache vom rechts Stehenden giebt $36:4$, und dies mit 4 multipliziert, giebt 36.

Aufgaben: $64:16$ (bedenke, daß $16 = 8 \cdot 2$ ist); $81:27$; $160:32$; $110:22$.

§ 53.

Statt durch mehrere Zahlen einzeln nach einander zu dividieren, kann man auch gleich durch das Produkt derselben dividieren.

Dies liegt schon in § 52, wenn man liest $(36:4):3 = 36:(3 \cdot 4)$.

II. Die Division geht nicht auf.

§ 54.

Aufgabe: 25 : 8 auszurechnen.

Lösung: Verfahren wir wie in § 41, so finden wir, daß wir von 25 die 8 3mal wegnehmen können; dann aber bleibt noch der Rest 1 übrig.

Anmerkung 1: Wir haben hier in Wirklichkeit nur **24** durch 8 dividiert, nicht aber 25. Deshalb wollen wir hier 3 den unvollständigen Quotienten nennen.
Bei der schriftlichen Darstellung wollen wir schreiben 25 : 8 \ 3, während wir schreiben 24 : 8 = 3.
24
1

Anmerkung 2: Der Rest muß immer kleiner als der Divisor sein.

Anmerkung 3: Probe: Man multipliziert den unvollständigen Quotienten mit dem Divisor und addiert dann den Rest, so muß der Dividendus sich ergeben. Für obiges Beispiel: 3 . 8 + 1 = 25.

Anmerkung 4: Den vollen Wert des ausgerechneten Quotienten betrachten wir erst bei der Bruchrechnung (Abschnitt II).

Aufgaben:

1) 45 : 7; 63 Stück : 12 Stück; 49 ℳ : 8.
2) Gieb an, welche Zahlen hier in Wirklichkeit nur dividiert sind.
3) Mache die Proben.
4) Bei einer Division bleibt 8 als Rest. a) Kann der Divisor dann 8 oder kleiner als 8 sein? b) Wenn hierbei der Divisor 11 und der unvollständige Quotient 5 ist, wie groß ist dann der Dividendus?

g. Regeldetri.

§ 55.

A. Die gerade Regeldetri.

Je mehr — desto mehr.
Je weniger — desto weniger.

1. Aufgabe: 6 kg einer Waare kosten 18 ℳ. ? ℳ kosten demnach 24 kg dieser Waare.

Vorbemerkung: Man soll hier etwas aussagen (ausrechnen) von 24 kg, nämlich wieviel ℳ sie kosten. Das kann man ausrechnen, da man hier eine Beziehung zwischen den kg und ℳ kennt, nämlich die Beziehung, daß 6 kg 18 ℳ kosten, und da man weiß: je mehr kg, desto mehr ℳ. Man muß nun also (betreffs des Preises) einen Schluß ziehen von 6 kg auf 24 kg.

Lösung: 24 kg sind das 4fache von 6 kg, kosten also auch 4 mal 18 ℳ, also 72 ℳ.

Anmerkung: Mit andern Worten ausgedrückt: So oft 6 kg in 24 kg enthalten sind, so oft mal 18 ℳ beträgt der Preis der 24 kg, also 4 . 18 ℳ = 72 ℳ.

2. Aufgabe: 6 kg kosten 18 ℳ. ? ℳ kosten 2 kg.

Lösung: 2 kg sind der 3. Teil von 6 kg, kosten also auch nur den 3. Teil von 18 ℳ, also 6 ℳ.

3. Aufgabe: 6 kg kosten 18 ℳ. ? ℳ kosten 4 kg.

Lösungen: a) Man schließt von 6 kg auf 1 kg und dann erst von 1 kg auf 4 kg. b) Man kann auch bequem von 6 kg auf 2 kg und dann von 2 kg auf 4 kg schließen. (Führe diese Schlüsse aus.)

Anmerkung: Man könnte bei der 3. Aufg. auch von 6 kg etwa auf 12 kg und dann von 12 kg auf 4 kg schließen. (Führe diese Schlüsse aus.)

B. Die umgekehrte Regeldetri.

Je mehr — desto weniger.
Je weniger — desto mehr.

1. Aufgabe: 9 Arbeiter vollenden einen Bau in 12 Tagen. ? Tage brauchen 27 Arbeiter dazu.

Lösung: 27 Arbeiter sind 3 mal soviel als 9 Arbeiter, brauchen also nur den 3. Teil der Zeit, also 4 Tage.

2. Aufgabe: 9 Arb. vollenden einen Bau in 12 Tagen. ? Tage brauchen 3 Arb. dazu.

Lösung: 3 Arb. sind der 3. Teil von 9 Arb., brauchen also 3 mal soviel Zeit, also 36 Tage.

3. Aufgabe: 9 Arb. vollenden einen Bau in 12 Tagen. ? Tage brauchen 6 Arb. dazu.

Lösungen: a) Man schließt von 9 Arb. auf 1 Arb. und dann erst von 1 Arb. auf 6 Arb. b) Man kann auch bequem von 9 Arb. auf 3 Arb. und dann von 3 Arb. auf 6 Arb. schließen. (Führe diese Schlüsse aus.)

Anmerkung: Man könnte auch von 9 Arb. etwa auf 18 Arb. und dann von 18 Arb. auf 6 Arb. schließen. (Führe diese Schlüsse aus).

Schlußbemerkung:

Man lege sich bei Regeldetriaufgaben immer folgende Fragen vor (vergl. die Vorbemerkung in § 55, *A*):

1) **Von welcher Größe ist etwas auszusagen?**
2) **Was ist davon auszusagen?**
3) **Welche Beziehung zwischen den Größen ist bekannt?**
4) **Von welcher Größe ist nun auf welche andere Größe zu schließen?**
5) **Gerade oder umgekehrte Regeldetri?**
6) **Wie schließt man am bequemsten?**

Aufgaben:

1) Beantworte diese Fragen für jede der voranstehenden Aufgaben dieses Paragraphen.
2) Weshalb kann man folgende Aufgabe nicht lösen: ? ₰ kosten 3 Dutzend?
3) 3 Wochen = ? Tagen. (Denke an die Beziehung, daß 1 Woche = 7 Tagen ist); 2 *H* = ? *E*; 4 Ganze = ? Fünfteln; 24 Stück = ? Dutzend; 12 Viertel = ? Ganzen. (Vergl. § 61 und den Anhang).
4) Das 8fache einer Zahl beträgt a) 32; b) 48; c) 80 Minuten. Wie heißt dieselbe?
5) Der 7. Teil einer Zahl beträgt a) 5; b) 2 Drittel; c) 4 Schock. Wie heißt dieselbe?
6) 12 Knaben teilen unter sich Nüsse zu gleichen Teilen. Jeder bekommt 8 Nüsse. ? Nüsse würde jeder bekommen, wenn a) 6; b) 3; c) 24 Knaben die Nüsse unter sich teilten?

B. Die mehrfach benannte Zahl. Die unbenannte Zahl mit Rücksicht auf den Stellenwert der Ziffern.

a. die Sorte.

§ 56.

1) Die verschiedenen Münz-, Maß-, Gewichts- u. s. w. Einheiten nennt man **Sorten.** (Siehe Anhang.)
2) 1 ℳ = 100 ₰. Hier enthält eine Einheit der einen Sorte (1 ℳ) eine bestimmte Anzahl von Einheiten einer andern Sorte (100 ₰). Man nennt 100 die **Währungszahl**[1]) für ℳ und ₰.

[1]) Statt Währungszahl sagt man auch Reduktionszahl. Dieselbe kann auch eine gebrochene Zahl sein; so enthält z. B. 1 Mdl. nicht eine ganze Anzahl von Dutz. (Siehe Bruchrechnung.)

3) Solche Sorten, zwischen welchen eine Währungszahl besteht, nennt man gleichartige Größen. Man kann sie in einander umrechnen. (Siehe Sortenverwandlung.)
4) Man unterscheidet höhere und niedere Sorten.
Beisp.: Tg. bezeichnet eine höhere Sorte als Std., Std. eine höhere als Minuten u. s. w.
Anmerkung: Im gewöhnlichen Leben spricht man auch von Waarensorten, Blumensorten u. dergl. Solche Größen kann man aber nicht in einander umrechnen, sie bilden deshalb nicht Sorten für das Rechnen.

Aufgaben:

1) Welche von den folgenden Sorten sind gleichartig, welche ungleichartig: kg und g; Std. und Meilen; Ganze und Fünftel; kg und ℳ?
2) In der 1. Aufg. in § 55 A rechneten wir aus, daß der Preis von 24 kg gleich 72 ℳ war. Wurden hierbei wirklich kg in ℳ umgerechnet oder nicht?

b. Die mehrfach benannte (mehrsortige) Zahl.

§ 57.

1) Beispiele mehrfach benannter Zahlen:
3 Tg. 10 Std.; 2 Schck. 3 Dtz. 7 Stck.; 3 *H* 0 *Z* 7 *E* 2 *z*; 9 Ganze 3 Achtel.
2) Eine **mehrfach** benannte Zahl bedeutet immer eine Summe **einfach** benannter Zahlen. Es ist aber Gebrauch, das Zeichen + dabei wegzulassen.
Beisp.: 3 Tg. 10 Std. = 3 Tg. + 10 Std.; 8 *Z* 2 *E* = 8 *Z* + 2 *E*.
3) Links steht immer die höchste Sorte.
4) Die Anzahl der Einheiten einer Sorte muß hierbei kleiner sein als die Währungszahl der nächsthöheren dastehenden Sorte.
Man schreibt z. B. nicht 2 ℳ 127 ₰, sondern verwandelt 127 ₰ in 1 ℳ 27 ₰, so daß man im ganzen 3 ℳ 27 ₰ erhält.
5) Die Klammer um mehrfach benannte Zahlen läßt man gewöhnlich weg.
Man schreibt z. B. 4 ℳ 2 ₰ : 2, aber (4 ℳ + 2 ₰) : 2.
6) **Die mehrstellige Zahl** (§ 58) **ist auch eine mehrfach benannte Zahl.** Man schreibt dabei aber die Benennungen *E*, *Z*, *H*, u. s. w. nicht mit hin, sondern deutet sie an durch die Stellung der Ziffern zu einander.
Z. B. statt 3 *H* 2 *Z* 8 *E* schreibt man einfach 328.

c. Das dekadische (dezimale) Zahlensystem (Zehnersystem). Das Numerieren.

§ 58.

1) „Dekadisch" kommt von dem griechischen Worte „deka", „dezimal" von dem lateinischen Worte „decem" her. Beide Wörte bedeuten „zehn".
2) Unserer Art und Weise, die Zahlen auszusprechen und zu schreiben liegt die Zahl **10** zu Grunde. (10 Finger. Vergl. § 8 Anm.)
3) In der letzten Stelle (rechts) stehen die Einer *(E)*, es folgen nach links der Reihe nach die Zehner *(Z)*, Hunderter *(H)*, Tausender *(T)*, Zehntausender *(ZT)*, Hunderttausender *(HT)*, Millioner *(M)*, Zehnmillioner *(ZM)* u. s. w. bis Hunderttausendmillioner *(HTM)*, Billioner *(B)*, Zehnbillioner *(ZB)* u. s. w. bis Hunderttausendbillioner *(HTB)*, Trillioner *(Tr)*, Zehntrillioner *(ZTr)* u. s. w. bis Hunderttausendtrillioner *(HTTr)*, Quadrillioner *(Q)* u. s. w.

4) Es sind also 1 *E*, 1 *Z*, 1 *H* u. s. w. die Einheiten der verschiedenen Stellen.
5) Sind gar keine Einheiten einer Stelle vorhanden, so muß man in diese Stelle eine Null setzen.
6) **10 Einheiten einer Stelle sind immer gleich 1 Einheit der nächst höheren Stelle.** (Dekadisches Zahlengesetz.)
Beisp.: 10 *E* = 1 *Z*; 10 *Z* = 1 *H* etc. (Siehe Anhang.)
7) In einer Stelle können also höchstens 9 Einheiten dieser Stelle stehen (§ 57, 4).
8) Wir sind so im Stande, auch die größten Zahlen durch die **10 Ziffern** 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 auszudrücken.
9) Unter **Numerieren** versteht man das Schreiben und Aussprechen der Zahlen. Für größere Zahlen ist Folgendes zu bemerken:

1 Million	wird geschrieben als	1	mit	6	Nullen	
1 Billion	„ „	„ 1	„	12	„	
1 Trillion	„ „	„ 1	„	18	„	
1 Quadrillion	„ „	„ 1	„	24	„	u. s. w.

10) Vielstellige Zahlen mit mehr als 6 Stellen schreibt und spricht man aus in Gruppen von je 6 Stellen (von rechts aus gruppiert).[1]
Bemerkung: Natürlich kann die links voranstehende Gruppe auch weniger als 6 Stellen enthalten.
Beisp.: 1) 906 214 003 wird gesprochen: 906 Millionen 214 003. 2) 13 607 001 000 301 000 000 700 010 wird gesprochen: 13 Quadrillionen 607 001 Trillionen 301 Billionen 700 010.
Anmerkung 1: Für 1000 Millionen giebt es auch den Namen Milliarde (von den Franzosen entlehnt).
Anmerkung 2: Wie ungeheuer und über alles Vermuten groß schon eine Milliarde (die kleinste 10stellige Zahl) ist, zeigt folgende Bemerkung: Wenn Tag und Nacht ununterbrochen gezählt würde und zwar in jeder Sekunde eins weiter, so würden doch zum Zählen einer Milliarde mehr als 30 Jahre gebraucht werden (also zum Zählen einer 11stelligen Zahl mehr als 300 Jahre u. s. w.).
11) Der Wert einer Zahl wird nicht verändert, wenn man links beliebig viel Nullen ansetzt oder dort vorhandene wegläßt.
Beisp.: 903 = 00903; 07 = 7.
Beweis: Keine der vorhandenen Ziffern ändert ihre Stelle und es wird auch nichts addiert oder subtrahiert, da z. B. 0 *T* = 0 ist.
Aufgabe: Weshalb darf man nicht rechts oder zwischen 2 Ziffern Nullen hinzuschreiben oder weglassen?
12) **Der Vorteil unseres Zahlensystems beruht auf dem Stellenwert der Ziffern.**[2]
Daß die Zahl 10 und nicht eine andere Zahl zu Grunde liegt ist gleichgültig. (Vergl. § 59, Anm. 2.)

Aufgaben:

1) Schreib folgende Zahlen: a) 1 *M* 203 *T* 45 *E*; b) 200 *Tr* 728 008 *M* 7 *H* 3 *Z*; c) 1 *Q*; d) Neunhunderttausend Billionen vierzig Millionen und eins.
2) Schreib und lies als mehrstellige Zahlen: a) 10^2; b) $4 \cdot 10^5$; c) $7 \cdot 10^3 + 8 \cdot 10^2 + 1$; d) $9 \cdot 10^6 + 2 \cdot 10^4 + 3 \cdot 10^1 + 8$.

---

[1] Anfangs mache man der Uebersicht halber zwischen je 2 solchen Gruppen einen längeren senkrechten Strich.
Beisp.: 40 | 031 425 | 900 087.

[2] Unser Ziffernsystem wird das indo-arabische genannt. Es ist von den Indern erfunden und durch die Araber nach Europa gebracht worden, wo es vom 11. Jahrhundert an die römischen Zahlen nach und nach verdrängte. Unsere Ziffern nennt man arabische im Gegensatze zu den römischen (§ 60).

3) Schreib und nenne a) die kleinste, b) die größte 2-; 5-; 6ziffrige Zahl.
4) Wieviel Stellen kommen nach der Ziffer 5, wenn sie a) *Z*; b) *T*; c) *M*; d) *B*; e) *TB*; f) *ZQ* bedeutet?
5) Sage sofort, ohne die Zahlen hinzuschreiben, wieviel Stellen jede der Zahlen in der 1. und 2. Aufgabe enthält?
6) Um wieviel wird 820 763 004 größer oder kleiner, wenn man a) statt der 4 eine 7; b) statt der 3 eine 1; c) statt der 6 eine 9 schreibt; d) wenn man die 8; e) die 8 und 2 wegläßt?
7) Addiere zu 820 763 604 a) 4 *E*; b) 2000; c) $2 \cdot 10^5$.
8) Subtrahiere a) bis c) in Aufg. 7.

d. Nichtdekadische Zahlensysteme.[1]

§ 59.

Auch andere Zahlen als 10 können Grundzahlen für Zahlensysteme sein (außer 0 und 1).

1. Beisp.: Das Fünfersystem. Hier ist 5 die Grundzahl und es giebt nur die Ziffern 0, 1, 2, 3, 4. Dabei stehen in der letzten Stelle (rechts) die Einer, es folgen nach links die Fünfer, Fünfundzwanziger, Hundertfünfundzwanziger u. s. w.

Beisp.: 213 (Fünfersystem) bedeutet $2 \cdot 5^2 + 1 \cdot 5^1 + 3$, also achtundfünfzig.

Aufgaben: 1) Gieb den Wert für folgende Zahlen des Fünfersystems an: a) 10; b) 100; c) 44; d) 102. 2) Schreibe im Fünfersystem folgende Zahlen des Zehnersystems a) 5; b) 8; c) 10; d) 27; e) 36; f) 47.

2. Beisp.: Das Zwölfersystem. Hier ist 12 die Grundzahl. Man müßte hier noch für die Zahlen zehn und elf besondere Zifferzeichen, etwa θ und $\frac{0}{0}$, einführen.

Aufgaben: Dieselben wie für das erste Beispiel, aber auf das Zwölfersystem bezogen.

Anmerkung 1: Stück, Dutzend, Groß weisen auf das Zwölfersystem hin.

Anmerkung 2: 12 ist durch 2, 3, 4, 6 ohne Rest teilbar, 10 aber nur durch 2 und 5. Deshalb würde das Zwölfersystem einen großen Vorzug vor dem Zehnersystem haben.

e. Die römischen Zahlen.

§ 60.

Die Römer setzten ihre Zahlen aus folgenden Zeichen zusammen:

I = 1.	C = 100.
V = 5.	D = 500.
X = 10.	M = 1000.
L = 50.	

Ein Zeichen rechts von einem gleichen oder höher geltenden deutete eine Addition, dagegen ein Zeichen links von einem höher geltenden eine Subtraktion an.

Nur vor M galt ein anderes Zeichen häufig als Multiplikator; eine allgemein übliche Schreibweise für die Vielfachen von M gab es nicht, oft nahm man dabei Wörter zu Hülfe.

[1]) § 59 wird besser in Sexta noch nicht durchgenommen.

Beisp.:	I = 1.	XI = 11.	CCC = 300.
	II = 2.	XVII = 17.	CD = 400.
	III = 3.	XIX = 19.	MDCCCLXXXIV = 1884.
	IV = 4.	XX = 20.	MM = 2000.
	VI = 6.	XXX = 30.	VM = 5000.
	VII = 7.	LXVI = 66.	XM = 10000.
	VIII = 8.	XC = 90.	
	IX = 9.	CX = 110.	

Anmerkung: Den Stellenwert kannten die Römer nicht, sie konnten deshalb nur sehr mühsam mit größeren Zahlen rechnen.

Aufgaben:

1) Lies und schreib mit unsern Zahlen: XVIII; XXXVII; IL; LXXIV; CLXV; CCII; DCCLXXXVIII; MCC.
2) Schreib mit römischen Ziffern: 57; 78; 80; 103; 489; 555; 1648; 1870; 2400.

f. Die Sortenverwandlung.

§ 61.

A. Das Resolvieren,

das heißt das Verwandeln höherer Sorten in niedere.

1. Aufgabe: 4 Woch. = ? Tg.

Lösung: Durch Regeldetri (§ 55) erhält man 28 Tg. Hieraus folgt die Regel: Man erhält sovielmal so viel Einheiten der niederen Sorte, als die Währungszahl (§ 56) beträgt.

Aufgaben: 3 Dtz. = ? Stck.; 4 Ganze = ? Fünfteln; 3 *H* = ? *E*; 5 Zwölfer = ? Vierern.

2. Aufgabe: 2 Std. 3 Min. 9 Sek. = ? Sek.

Lösungen:

a) Man verwandelt 2 Std. in Min., zählt 3 Min. hinzu, verwandelt dann die erhaltenen Min. in Sek und zählt 9 Sek. hinzu.
b) Man verwandelt 2 Std. gleich in Sek., desgl. 3 Min. und addiert dann alle vorhandenen Sek. Res.: 7389 Sek.

Aufgaben: 3 Dtz. 11 Stck. = ? Stck.; 3 Schck. 2 Mdl. 5 Stck. = ? Stck.; 4 *H* 2 *Z* = ? *E*; 5 Ganze 7 Achtel = ? Achteln.

B. Das Reduzieren,

das heißt das Verwandeln niederer Sorten in höhere.

1. Aufgabe: 35 Tg. = ? Woch.

Lösung: Durch Regeldetri (§ 55) erhält man 5 Woch. Hieraus folgt die Regel: Man erhält sovielmal so wenig Einheiten der höheren Sorte, als die Währungszahl beträgt.

Anmerkung: Geht die Division nicht auf, z. B. bei der Aufg.: 37 Tg. = ? Woch., so ist die Aufgabe ohne Bruchrechnung nicht zu lösen. (Vergl. aber 2. Aufg.)

Aufgaben: 120 Stck. = ? Schck.; 300 ₰ = ? ℳ; 50 *E* = ? *Z*; 700 *Z* = ? *H*; 28 Viertel = ? Ganzen; 6 Fünfer = ? Zehnern. Mache überall die Probe durch Rückverwandlung.

2. Aufgabe: 37 Tag. = ? Woch. und Tg.

Lösung: 1 Woch. = 7 Tg. So oft man 7 Tg. von 37 Tg. wegnehmen kann (hier 5 mal), so viel ganze Wochen ergeben sich. Dann bleiben noch 2 Tg. Rest. (Vergl. § 41 B.)

Res.: 5 Woch. 2 Tg.

Aufgaben: 128 Sek. = ? Min. und Sek.; 461 ₰ = ? ℳ und ₰; 67 *E* = ? *Z* und *E*; 23 *z* = ? *E* und *z*; 17 Fünftel = ? Ganze und Fünftel. Mache überall die Probe durch Rückverwandlung.

3. Aufgabe: 135 Stck. = ? Schck., Dtz. und Stck.

Lösungen:

a) Man verwandelt 135 Stck. erst in Dtz. und Stck., dann die erhaltenen Dtz. in Schck. und Dtz.

b) Man verwandelt 135 Stck. erst in Schck. und Stck., dann die erhaltenen Stck. in Dtz. und Stck.

Res.: 2 Schck. 1 Dtz. 3 Stck.

Anmerkung 1: Im allgemeinen ist die Lösung a) die bequemere, weil man mit einer kleineren Zahl dividiert. (Bei der vorliegenden Aufgabe ist jedoch gerade b) vorzuziehen, da sich durch 60 sehr bequem dividieren läßt.)

Anmerkung 2: Sind von einér Sorte gar keine Einheiten vorhanden, so zeigt man dies durch eine Null an, z. B. 3 Tg. 0 Std. 20 Min. (Vergl. die Null in der mehrstelligen Zahl.)

Aufgaben: 245 ₰ = ? ℳ, Gr., ₰; 300 Stck. = ? Gr., Dtz., Stck.; 5304 *E* = ? *T*, *Z*, *E*. Mache überall die Probe durch Rückverwandlung.

Schlußbemerkung: Beachte strengstens, daß bei der Sortenverwandlung nicht die benannten Zahlen multipliziert oder dividiert werden, sondern nur die Anzahlen derselben. Deshalb empfiehlt es sich, schriftlich nur mit den Anzahlen zu rechnen und die betreffenden Benennungen schließlich dem Resultate beizufügen. (Achte auf die in § 54 angegebene Schreibweise.)

g. Die Addition.

§ 62.

Beisp.: 1)	9 Groß	5 Dtz.	10 Stck.	
	+ 3 „	0 „	5 „	
	+ 0 „	11 „	8 „	
Res.:	13 Groß	5 Dtz.	11 Stck.	

Man schreibt am zweckmäßigsten die gleichnamigen Sorten unter einander und fängt beim Addieren mit der niedrigsten Sorte an. Beachte hierbei § 57, 4 und § 61, B, 2. Aufg.

Beisp.: 2)	8 *T*	7 *H*	0 *Z*	3 *E*	Beisp.: 3)	8703
	+ 0 „	2 „	8 „	9 „		+ 289
	+ 6 „	0 „	3 „	0 „		+ 6030
Res.:	15 „	0 „	2 „	2 „	Res.	15022

Bemerkung: Beisp. 3 ist dasselbe wie Beisp. 2, nur daß es in der Form der mehrstelligen Zahl geschrieben ist. Alle 3 Beisp. erfordern ein und dieselbe Überlegung.

Anmerkung: Das Addieren beliebig großer Zahlen beruht also auf dem Addieren der Zahlen 0 bis 9.

Aufgaben: 1)	15 Ganze 3 Achtel.		2)	8 *Z* 3 *E* 7 *z* 8 *h*
	+ 9 „ 2 „			+ 0 „ 1 „ 0 „ 7 „
	+ 0 „ 7 „			+ 9 „ 0 „ 6 „ 5 „
	+ 326 „ 5 „			

h. Die Subtraktion.

§ 63.

Beisp. 1)	13 Tg.	4 Std.	1 Min.
	— 5 „	1 „	8 „
Res.:	8 „	2 „	53 „

Auch hier schreibt man am zweckmäßigsten die gleichnamigen Sorten unter einander und fängt beim Subtrahieren mit der niedrigsten Sorte an.

Besonders zu beachten ist der Fall, daß im Minuend weniger Einheiten einer Sorte vorhanden sind als im Subtrahend.

Erklärung obiger Ausrechnung: 8 Min. kann man von 1 Min. nicht subtrahieren; deswegen verwandelt man 1 Std. von den vorhandenen 4 Std. in 60 Min.[1]), so daß man nun oben 3 Std. 61 Min. hat.. Von diesen 61 Min. subtrahiert man nun 8 Min. u. s. w. Wären keine Stunden vorhanden, so würde man 1 Tg. von den 13 Tg. in 24 Std. und von diesen 1 Std. in 60 Min. verwandeln u. s. w.

Beisp. 2)	7 *T*	0 *H*	2 *Z*	4 *E*	Beisp. 3)	7024
	— 5 „	0 „	7 „	5 „		— 5075
Res.:	1 „	9 „	4 „	9 „	Res.:	1949

Bemerkung: Beisp. 3 ist dasselbe wie Beisp 2, nur daß es in der Form der mehrstelligen Zahl geschrieben ist. Alle 3 Beisp. erfordern ein und dieselbe Überlegung.

Anmerkung: Das Subtrahieren beliebig großer Zahlen von einander beruht also auf dem Subtrahieren der Zahlen 0 bis 9.

Aufgaben: 1)	3407 Ganze 5 Elftel.	2)	8 *Z* 0 *E* 4 *z* 2 *h*
	— 998 „ 7 „		— 3 „ 8 „ 4 „ 9 „

i. Die Multiplikation.[2])

§ 64.

1. Aufgabe: 7 Tg. 2 Std. 20 Min. 4 = ? Tg., Std., Min.

Lösung: Die mehrfachbenannte Zahl ist nach § 57, 2 eine Summe. Man wendet nun § 35 an. Am zweckmäßigsten fängt man beim Multiplizieren wegen der vorzunehmenden Sortenverwandlungen mit der niedrigsten Sorte an. (§ 57, 4 und § 61, B, 2. Aufg.)

Res.: 28 Tg. 9 Std. 20 Min.

2. Aufgabe: 3 *T* 4 *H* 0 *Z* 5 *E* . 7 = ? *T*, *H*, *Z*, *E*.

Lösung: Durch dieselbe Überlegung wie bei der 1. Aufgabe erhält man als Resultat: 23 ***T*** 8 ***H*** 3 ***Z*** 5 ***E***.

3. Aufgabe: 3405 . 7.

Diese Aufgabe ist ganz dieselbe wie die 2., nur daß man sich der Form der mehrstelligen Zahl bedient.

Res.: 23835.

---

[1]) Man sagt: ich borge 1 Std. und deutet dies durch einen Punkt neben oder auch über der 4 an.

[2]) In §§ 64 und 65 stehe der Multiplikator immer am Ende.

Aufgaben:

1) Rechne obige 3 Aufgaben auch durch Addieren aus (Vergl. § 35, Beweis).
2) 5 Ganze 2 Siebentel . 3.
3) 4 Ganze 3 Fünftel . 6.
4) 7 *E* 5 *z* 3 *h* . 4.

§ 65.

Für das Rechnen mit mehrstelligen Zahlen sind folgende Fälle noch besonders zu beachten:

1) Der Multiplikator ist eine Potenz von 10 (§ 38).

Aufgabe: 4312 . 10.

Lösung: Beim Multiplizieren der einzelnen Stellen mit 10 müssen die *E* zu *Z*, die *Z* zu *H* werden u. s. w. Dies wird erreicht, wenn man einfach eine Null anhängt.

Res.: 43120.

So ergiebt sich: Man multipliziert

mit 10 (= 10^1), indem man 1 Null anhängt,
„ 100 (= 10^2), „ „ 2 Nullen „
„ 1000 (= 10^3), „ „ 3 „ „ u. s. w.

Aufgaben:

1) 65 . 1000; 101 . 10^2; 98 . 10^5.
2) 34 . 70 (Multipliziere mit 7 und hänge dann eine Null an); 168 . 40 000; 86 . 5000.

2) Der Multiplikator ist eine beliebige mehrstellige Zahl.

Aufgabe: 4305 . 913 (wo 913 der Multiplikator ist).

Lösungen:

a) Man nimmt 4305 erst 3 mal, dann 10 mal, dann 900 mal und addiert diese Produkte.

Man erhält:	Kürzer geschrieben:
12915	12915
+ 43050	4305
+ 3874500	38745
Res.: 3930465	3930465

b) Man nimmt 4305 erst 900 mal, dann 10 mal, dann 3 mal und addiert diese Produkte.

Man erhält:	Kürzer geschrieben:
3874500	38745
+ 43050	4305
+ 12915	12915
Res.: 3930465	3930465

Für die kürzere (allgemein übliche) Schreibweise ergiebt sich die Regel: Beginnt man beim Multiplizieren mit der niedrigsten Stelle des Multiplikators, so rückt man jedes folgende Produkt immer 1 Stelle nach links ein; dagegen nach rechts aus, wenn man mit der höchsten Stelle beginnt.

Bemerkung: Beachte besonders, daß für jede Null des Multiplikators 1 Stelle mehr ein- oder ausgerückt wird.

Anmerkung: Man wählt am vorteilhaftesten diejenige Zahl zum Multiplikator, welche entweder die wenigsten Stellen hat, oder welche solche Ziffern hat, mit welchen sich am bequemsten multiplizieren läßt (z. B. die Ziffern 1 oder 0).

Anmerkung: Das Multiplizieren mehrstelliger Zahlen mit einander beruht also auf dem Multiplizieren einstelliger Zahlen mit einander (dem kleinen Einmaleins).

Aufgaben:

1) Gieb an, welche Zahl am vorteilhaftesten als Multiplikator zu wählen ist bei: 7668 . 1003; 222 . 967; 84 . 3092. Führe die Multiplikationen aus.
2) Rechne 6314 . 12 aus, indem du gleich mit 12 multiplizierst und nicht mit 2 und 10; desgl. 402 . 15

k. Die Division.

§ 66.

1. Aufgabe: 19 Tg. 13 Std. 12 Min. : 9 = ? Tg., Std., Min.

Lösung: Die mehrfach benannte Zahl ist nach § 57, 2 eine Summe. Man wendet nun § 49 an und beginnt mit der höchsten Sorte.

19 Tg. : 9 giebt 2 Tg., Rest 1 Tg. Es sind also erst 18 Tg. durch 9 dividiert (§ 54). Der übrigbleibende 1 Tg. ist = 24 Std., welche samt den 13 Std. auch noch durch 9 zu dividieren sind. Man dividiert demnach im ganzen 37 Std. durch 9, giebt 4 Std., Rest 1 Std. 1 Std. 12 Min. sind 72 Min., welche, durch 9 dividiert, 8 Min. ergeben.

Res.: 2 Tg. 4 Std. 8 Min.

2. Aufgabe: 5 *T* 6 *H* 7 *Z* 6 *E* : 4.

Lösung: Durch dieselbe Überlegung wie bei der ersten Aufgabe erhält man als Resultat: 1 *T* 4 *H* 1 *Z* 9 *E*.

3. Aufgabe: 5676 : 4.

Lösung: Dies ist dieselbe Aufgabe wie die zweite, nur daß die Form der mehrstelligen Zahl angewandt ist.

Schriftliche Darstellung:

```
5676 : 4 = 1419
4
—
16
16
——
  7
  4
  —
  36
  36
  ——
   0
```

Aufgaben: 29 Ganze 2 Fünftel : 7; 3 Ganze 1 Drittel : 5; 4 *Z* 1 *E* 4 *z* 4 *h* : 8.

Anmerkung. Sind Dividendus und Divisor beide benannt, so macht man sie gleichnamig und rechnet dann nur mit den Anzahlen (§ 41 B und § 47).

Beisp.: 2 ℳ 40 ₰ : 2 Groschen = 240 ₰ : 20 ₰ = 240 : 20 = 12.

Aufgaben: 4 Woch. 2 Tg. : 3 Tg.; 3 Ganze 1 Fünftel : 4 Fünftel; 4 *E* 2 *z* : 7 *z*.

§ 67.

Für das Rechnen mit mehrstelligen Zahlen sind folgende Fälle noch besonders zu beachten:

1) Der Divisor ist eine Potenz von 10 (§ 38).

Aufgabe: 2768 : 10.

Lösung: Beim Dividieren der einzelnen Stellen durch 10 müssen die ***Z*** zu ***E***, die ***H*** zu ***Z***, die ***T*** zu ***H*** werden u. s. w. Dies wird erreicht, indem man einfach die letzte Stelle abschneidet, welche dann den Rest bildet. Res.: 276 Rest 8.

So ergiebt sich: Man dividiert

durch 10 ($= 10^1$), indem man 1 Stelle rechts abschneidet,
„ 100 ($= 10^2$), „ „ 2 Stellen „ „
„ 1000 ($= 10^3$), „ „ 3 „ „ „ u. s. w.,

wobei immer die abgeschnittenen Stellen den Rest bilden.

Bemerkung: Sind die abgeschnittenen Stellen lauter Nullen, so geht die Division auf.

Aufgaben:

1) 1734 (= 1734 *E*) sind a) ? *H* und *E*; b ? *T* und *E*; c) ? *H*. *Z*, *E*; d) ? *T*, *H*, *E*.
2) 90 030107 sind a) ? *M*, *T*, *E*; b) ? *M*, *ZT*, *H*, *Z*, *E*; c) ? *HT*, *T*, *Z*, *E*.

2) Der Divisor ist eine beliebige mehrstellige Zahl.

Aufgabe: 467185 : 387.

Lösung: Hier ist dieselbe Überlegung erforderlich, wie bei den Aufgaben des § 66. Nur ist noch Folgendes besonders zu beachten:

Eine 1- oder 2stellige Zahl kann bei der Division durch eine 3stellige (hier 387) noch keine Ganzen ergeben, es können hier also keine ***HT*** und keine ***ZT*** sich ergeben. Man betrachtet hier also gleich die ersten **3** Stellen des Dividendus, nämlich die 467 ***T***, und sieht zu, ob sich im Quotienten ***T*** ergeben. Dies ist hier der Fall, es ergiebt sich 1 ***T*** u. s. w.

Schriftliche Darstellung in der kürzeren Form (§ 66, 3. Aufg.):

```
467185 : 387 (1207
387
---
 801
 774
 ----
  2785
  2709
  ----
    76
```

(Achte hier besonders darauf, daß die Null im Quotienten nicht ausgelassen wird.)

Bemerkung: Wäre die erste Ziffer links z. B. eine 2 gewesen, so hätte man auch noch keine *T* im Quotienten erhalten und man hätte erst mit 2671 *H* bei der Division begonnen. Wie oft nun 387 in 2671 enthalten ist, muß man durch Probieren finden. Man vermutet zunächst, daß sich 8 ergiebt, weil 3 in 26 8 mal enthalten ist; man überzeugt sich aber durch die Multiplikationsprobe leicht, daß 8, ja sogar 7 zu groß ist, und daß nur 6 sich ergiebt.

Anmerkung: Das Dividieren beliebig großer Zahlen durch einander beruht also auf dem Dividieren und Multiplizieren innerhalb des kleinen Einmaleins.